Analysis 2

17.05.2018
Prof. Dr. H. Koch
Dr. F. Gmeineder
Abgabe: 07.06.2018 in der Vorlesung

Wiederholungsblatt

Dieses Blatt soll Ihnen bei der Wiederholung des bisherigen Stoffs der Analysis 2 helfen. Es wird am

29. Juni 2018 von 16–18 Uhr im Kleinen Hörsaal der Wegelerstraße 10 besprochen,

Musterlösungen zum zweiten Teil werden dann dort präsentiert. Nun einige Kommentare/Ratschläge; diese sind nur Empfehlungen unsererseits:

(a) Dieses Blatt gliedert sich in zwei Teile; Wiederholung und Übungen. Idealerweise bearbeiten Sie zuerst den Wiederholungsteil wie folgt: Aufgabe 1 wiederholt die zentralen Konzepte der Vorlesung und soll Ihnen einen kleinen Leitfaden durch den bisherigen Stoff geben. Bearbeiten Sie, falls nötig, Aufgabe 1 durchaus mit Ihrer Mitschrift oder Lehrbüchern. Sobald Sie der Ansicht sind, dass Sie ein solides Verständnis der einzelnen Fragen besitzen, vergleichen Sie Ihre Ergebnisse (insbesondere, wenn nach Beispielen gefragt ist) mit denen Ihrer Kommilitonen und ergänzen Sie Ihre Antworten gegebenenfalls.

(b) In einem zweiten Schritt sollten Sie in Aufgabe 2 versuchen, die zentralen Begriffe und Sätze für sich selbst zusammenzutragen. Gleichen Sie auch dies mit der Bearbeitung Ihrer Kommilitonen ab – wo gibt es Unterschiede, und – falls es diese gibt – warum schätzen Ihre Kommilitonen gewisse Resultate wichtiger ein als Sie und vice versa? Modifizieren Sie Ihre Liste und prägen Sie sich diese gut ein. Im Hinblick auf die Klausur: **Stellen Sie sicher, dass Sie insbesondere die Definitionen und Sätze auf Ihrer Liste einwandfrei beherrschen!** Wiederholen Sie diese Begriffe oft, und versuchen Sie, diese zu vernetzen.

(c) Nachdem Sie der Ansicht sind, dass sich die Konzepte aus Aufgabe 1 und 2 gesetzt haben, bearbeiten Sie nochmals Aufgabe 1 – nun *ohne Unterlagen* – und dann Aufgabe 3. Dies ist eine Checklist, die Ihnen mit kurzen Fragen dienen soll, Ihr Verständnis der in Aufgabe 1 dargelegten Fragen zu überprüfen.

(d) Ab Aufgabe 4 finden Sie Aufgaben, die in Analysis 2-Klausuren an deutschen Universitäten aufgetreten sind, und die jeweils vom Umfang in der Abschlussklausur zu dieser Vorlesung auftreten könnten. Idealerweise bearbeiten Sie diese Aufgaben, nachdem Sie mit Aufgabe 1 und 2 (möglicherweise auch Aufgabe 3) fertig sind.

(e) Die Klausur ist für Ende Juli angesetzt – Sie haben also noch fast zwei Monate Zeit. **Fangen Sie also bereits jetzt an, neben diesem Wiederholungsblatt die vorherigen Übungsblätter nochmals durchzugehen und den Stoff zu wiederholen; so werden Sie im Juli weniger Stress haben.** Zur Wiederholung der Blätter: Es ist wichtiger, dass Sie bei einer Aufgabe wissen und verstehen, was das zentrale Argument ist, als dass Sie die Lösung auswendig lernen.

(f) Im Internet gibt es eine Fülle von Altklausuren, die es sich natürlich auch lohnt, durchzurechnen. Beachten Sie allerdings: **Diese Klausuren beziehen sich auf teils anders konzipierte Vorlesungen, und es gibt teilweise Unterschiede im Stoff.** Wenn Sie sich unsicher sind, ob etwaige Aufgaben überhaupt passen, so fragen Sie Ihre Tutorin / Ihren Tutor oder wenden Sie sich an den Helpdesk (L. Behn).

Aufgabe 1: Wiederholung

Machen Sie sich noch einmal die nachfolgenden aus der Vorlesung bekannten Konzepte klar:

(a) Geben Sie Beispiele metrischer Räume. Sind diese vollständig? Sind diese kompakt?

(b) Welche äquivalenten Charakterisierungen von Kompaktheit in metrischen Räumen kennen Sie?

(c) Wie verhalten sich Offenheit/Abgeschlossenheit/Kompaktheit unter Komplementbildung, Durchschnitten, Vereinigungen?

(d) Wie kommt das folgende Diagramm zustande? Vervollständigen Sie zu genauen Aussagen mit korrekten Implikationen:

$$\text{Skalarprodukt} \Longrightarrow \text{Norm} \Longrightarrow \text{Metrik}$$

Wie beweisen Sie die einzelnen Implikationen?

(e) Geben Sie Beispiele von unendlichdimensionalen Banachräumen sowie von normierten Räumen, die *nicht* Banach sind.

(f) Wann heißt ein Weg rektifizierbar? Wie ist das Wegintegral definiert?

(g) Wann heißt eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *total differenzierbar*? Machen Sie sich nochmals klar, dass die Ableitung einer total differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in einem Punkt x_0 in der Tat eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist.

(h) Wie sind partielle Ableitungen erklärt?

(i) Welche Aussagen sind aus der Existenz der partiellen Differenzierbarkeit in einem Punkt x_0 ableitbar: Stetigkeit, totale Differenzierbarkeit?

(j) Wir wird die Kettenregel für mehrdimensionale Funktionen formuliert? Überlegen Sie sich nochmals, wie diese bewiesen wird – als Übungsaufgabe :)

(k) Wie erhält man aus der eindimensionalen Taylorformel die mehrdimensionale? Wie können Sie damit Restgliedabschätzungen im Mehrdimensionalen gewinnen?

(l) Was besagt der Satz über inverse Funktionen bzw. lokale Umkehrbarkeit? Machen Sie sich diesen Satz insbesondere auch für Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klar.

(m) Was ist die Motivation für den Satz über implizite Funktionen? Was besagt dieser Satz sodann?

(n) Welche Idee liegt den Lagrangemultiplikatoren zugrunde? Formulieren Sie den Satz über Lagrangemultiplikatoren.

(o) Was sind Mannigfaltigkeiten? Wie beweisen Sie, dass Hyperebenen $\{(x_1, ..., x_d)^\mathsf{T} \colon\ a_1x_1 + ... + a_dx_d = a_{d+1}\}$ für $a_1, ..., a_{d+1} \in \mathbb{R}$ $(d-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^d$ sind?

Aufgabe 2: Wiederholung

Erstellen Sie eine Liste mit den Ihrer Meinung nach 10–15 zentralen Definitionen und Sätzen der Vorlesung. Vergleichen Sie diese Liste mit denen Ihrer Kommilitonen und diskutieren Sie jeweils Ihre Auswahl.

Aufgabe 3: Checklist

Entscheiden Sie, ob die nachfolgenden Aussagen *wahr* oder *falsch* sind. Korrigieren Sie gegebenenfalls die Formulierungen so, dass korrekte Aussagen entstehen. Falls nicht anders gesagt, ist (X, d) ein nicht weiter spezifizierter metrischer Raum.

(a) Es gibt auf $M := \{0, 1, 2\}$ (als Teilmenge von $\mathbb{R}$ aufgefasst) eine Abbildung $\|\cdot\|\colon M \to \mathbb{R}$, sodass $(M, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum ist.

(b) Eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten metrischen Raumes ist selber kompakt.

(c) In einem beliebigen Vektorraum sind alle Normen äquivalent.

(d) Beliebige Schnitte von offenen Mengen in X sind offen.

(e) Abzählbare Schnitte von offenen Mengen in X sind offen.

(f) Endliche Schnitte von offenen Mengen in X sind offen.

(g) Kompakte Teilmengen von (X, d) sind abgeschlossen.

(h) Die Menge $\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})\colon\ \det(A) = 1\}$ ist abgeschlossen in $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, wobei $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit irgendeiner Norm versehen ist.

(i) Sei nun d eine Metrik auf $\mathbb{R}$. Dann ist eine Menge $M \subset X$ genau dann bzgl. d kompakt, wenn sie bzgl. d abgeschlossen und beschränkt ist.

(j) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann total differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}^n$, wenn sie in x_0 stetig partiell differenzierbar ist.

(k) Ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in allen Richtungen differenzierbar, so ist f total differenzierbar.

(l) Angenommen, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist stetig differenzierbar mit $\det(Df) \neq 0$ auf ganz $\mathbb{R}^n$. Dann ist f injektiv.

(m) Angenommen, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und erfüllt in $x_0 \in \mathbb{R}^n$: $Df(x_0) = 0$ und die Hessematrix $Hf(x_0)$ ist positiv definit. Dann liegt in x_0 ein lokales isoliertes Minimum vor.

(n) Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ist genau positiv definit, wenn $\det(A) > 0$.

Überlegen Sie sich zu diesen Aussagen auch jeweils eine sorgfältige Begründung Ihrer Entscheidung.

Aufgabe 4:

Es sei $\mathcal{P}$ der Vektorraum aller reellen Polynomfunktionen $p\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ vom Grad zwei. Bestimmen Sie mit Beweis, ob die folgenden Abbildungen Normen auf $\mathcal{P}$ definieren:

$$\begin{aligned} f_1 &\colon p \mapsto |p(0)|, \\ f_2 &\colon p \mapsto |p(0)| + |p(\tfrac{1}{2})| + |p(1)| \\ f_3 &\colon p \mapsto \int_0^1 |p(t)p(1-t)|\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Aufgabe 5:

Sei für eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ wie auf Übungsblatt 6 $\mathrm{Spur}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$ ihre *Spur*. Betrachten Sie die Abbildung $f\colon M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(A) = (\mathrm{Spur}(A))^2$. Bestimmen Sie *direkt anhand der Definition* die Ableitung $Df(A_0)$ für alle $A_0 \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Aufgabe 6:

Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum sowie $(K_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von nichtleeren, abgeschlossenen Teilmengen von X, für die $j \leq k \Rightarrow K_k \subset K_j$ gilt. Zeigen Sie, dass $\bigcap_{j\in\mathbb{N}_0} K_j$ nichtleer ist.

Aufgabe 7:

Sei K eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d) und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K. Zeigen Sie, dass es $\lambda > 0$ mit der folgenden Eigenschaft gibt: Zu jeder Teilmenge $A \subset K$ mit $\operatorname{diam}(A) \leq \lambda$ existiert ein $i \in I$ mit $A \subset U_i$. Hierbei ist für $S \subset X$ $\operatorname{diam}(S) := \sup\{d(x, y) \colon x, y \in S\}$ der *Durchmesser* von S.

Aufgabe 8:

Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \frac{1}{10} \sin(x + y) = x \\ \frac{1}{10} \cos(x + y) = y \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung $(x, y)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^2$ besitzt.

Aufgabe 9:

Es sei $f \colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Die Funktion $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $n \geq 3$ sei gegeben durch $F(x) := f(|x|)$, wobei $|x|$ die Euklidische Norm von $x \in \mathbb{R}^n$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\Delta F(x) = f''(|x|) + \frac{n-1}{|x|} f'(|x|)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt. Hierbei ist

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

der Laplaceoperator.

(b) Angenommen, $f(t) = t^\alpha$ für ein $\alpha \neq 0$, und es gelte $\Delta F = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass α eindeutig durch n bestimmt ist und bestimmen Sie diese Abhängigkeit.

Aufgabe 10:

Sei $f \colon (-\pi, \pi)^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f \colon (x, y)^\mathsf{T} \mapsto \sin(x) \sin(y)$. Bestimmen Sie mit Beweis alle lokalen Extrema von f.

Aufgabe 11:

Wir betrachten die Abbildung $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f \colon x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto x^\mathsf{T} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} x.$$

(a) Bestimmen Sie mit Beweis, ob $x = (0, 0, 0, 0)^\mathsf{T}$ ein lokales Minimum ist.

(b) Besitzt f ein globales Minimum? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Bestimmen Sie mit Beweis, ob die Niveaumenge $M := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\mathsf{T} \colon\ f((x_1, ..., x_4)^\mathsf{T}) = f((1, ..., 1)^\mathsf{T})\}$ kompakt ist bezüglich der Euklidischen Standardmetrik.

(d) Bestimmen Sie mit Beweis, ob M wie in (c) eine reguläre Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist und bestimmen Sie ihre Dimension.

Aufgabe 12:
Sei $f\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \sqrt{x+y}$, wobei A die maximale Menge ist, auf der f definiert ist. Bestimmen Sie das m-te Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt $(1,0)^\mathsf{T}$.

Aufgabe 13:
Sei $r > 0$. Berechnen Sie die Länge des Weges

$$\begin{aligned} &\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \\ &\gamma(t) := \begin{pmatrix} r(t-\sin(t)) \\ r(1-\cos(t)) \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,2\pi]. \end{aligned}$$

Aufgabe 14:
Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$g\colon (x,y)^\mathsf{T} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+1 \end{pmatrix}$$

und sei weiters $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t))^\mathsf{T}$, die Parametrisierung des Einheitskreises. Berechnen Sie

$$\int_\gamma g \,\mathrm{d}\overrightarrow{x}.$$

Aufgabe 15:
Bestimmen Sie das Maximum der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = xy$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

Aufgabe 16:
In dieser Aufgabe legen wir den Volumenbegriff wie aus der Schule bekannt zugrunde. Berechnen Sie das maximale Volumen eines Quaders im $\mathbb{R}^3$, der die Oberfläche 10 (z.B. in m^2 gemessen) hat. Welche geometrische Form hat ein solcher Quader?