

Aufgabe 1 (Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel). In dieser Aufgabe beweisen wir für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und alle positiven reellen Zahlen $a_1, \dots, a_n \geq 0$, dass

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k\right)^n \geq \prod_{k=1}^n a_k. \quad (1)$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ Zahlen $a_1, \dots, a_n > 0$ existieren, so dass

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k\right)^n = \prod_{k=1}^n a_k.$$

(b) Zeigen Sie die Ungleichung (1) für die Fälle $n = 1$ und $n = 2$.

(c) Zeigen Sie die Ungleichung (1) für den Fall $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$.

(d) Zeigen Sie die Ungleichung (1) für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Aufgabe 2 (K1-Ring). Sei R ein K1-Ring. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $a, b \in R$ gelten die folgenden Rechenregeln:

$$-(-a) = a, \quad (-a) + (-b) = -(a + b), \quad a(-b) = -(ab).$$

(b) Ist $1 = 0$, dann hat R nur ein Element.

(c) Ist R total geordnet, dann gelten für alle $a, b \in R$:

$$a \leq b \Rightarrow -b \leq -a, \quad a < b \Rightarrow -b < -a.$$

Aufgabe 3 (Infimum und Supremum). Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleer. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist A nach oben beschränkt, dann ist

$$-A := \{-x \mid x \in A\}$$

nach unten beschränkt, und $\inf(-A) = -\sup A$.

(b) Sind A und B nach oben beschränkt, dann ist auch

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

nach oben beschränkt, und $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

(c) Sind A und B beschränkt (d.h., nach oben beschränkt *und* nach unten beschränkt), dann ist auch

$$A \cdot B := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$$

beschränkt, und es gilt

$$\sup A \cdot \sup B \leq \sup(A \cdot B).$$

(d) Geben Sie für jede der nachfolgenden Aussagen je nichtleere beschränkte Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit $\inf A < \sup A$ und $\inf B < \sup B$ an, so dass der entsprechende Fall eintritt.

$$(d.1) \sup A \cdot \sup B = \sup(A \cdot B);$$

$$(d.2) \sup A \cdot \inf B = \sup(A \cdot B);$$

$$(d.3) \inf A \cdot \inf B = \sup(A \cdot B).$$

Aufgabe 4 (Konvergenz – Definition). Diskutieren Sie für jede der folgenden Aussagen, wieso sie *nicht* äquivalent zu der in der Vorlesung definierten Aussage ‘ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert’ sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung durch ein Gegenbeispiel.

- (a) Für alle $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ für welches es wiederum ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass $|a_n - a| < \varepsilon$.
- (b) Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, für welches es wiederum ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass $|a_n - a| < \varepsilon$.
- (c) Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \geq n_0$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$.
- (d) Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$.
- (e) Es existiert kein $a \in \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft: Es existiert ein $\varepsilon > 0$ so dass für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n \geq n_0$ existiert mit $|a_n - a| > \varepsilon$.

Schließlich: was denken Sie von der folgenden Aussage?

- (f) Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft: Es existiert kein $\varepsilon > 0$ so dass für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n \geq n_0$ existiert mit $|a_n - a| \geq \varepsilon$.

Aufgabe 5 (Korollar 4.7). Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen in \mathbb{R} . Beweisen Sie, dass die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n - b_n$ für $n \in \mathbb{N}$, auch konvergiert, und dass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$