Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 8
Lineare Algebra 1

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Sei K ein Körper und seien $U_1, U_2 \subset V$ Untervektorräume eines K-Vektorraums V. Betrachte die kanonischen K-linearen Abbildungen

$$p_1 : V \longrightarrow V/U_1 \quad \text{und} \quad p_2 : V \longrightarrow V/U_2.$$

(In der Vorlesung wurde die kanonische Abbildung mit "*can*" bezeichnet.)

(a) Begründe kurz, dass

$$p_1 \times p_2 : V \longrightarrow V/U_1 \oplus V/U_2, \quad v \mapsto (p_1(v), p_2(v))$$

eine K-lineare Abbildung ist und berechne den Kern $\ker(p_1 \times p_2)$.

(b) Zeige, dass $p_1 \times p_2$ genau dann ein Epimorphismus ist, wenn $U_1 + U_2 = V$. Man folgere daraus (und mit Hilfe von Teil (a)) ein Kriterium wann $p_1 \times p_2$ ein Isomorphismus ist.

(c) Betrachte das Beispiel des $\mathbb{R}$-Vektorraums $V = \mathbb{R}^3$ und finde ein Beispiel von Untervektorräumen $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^3$ mit $U_1 \neq U_2$, sodass $p_1 \times p_2$ weder injektiv noch surjektiv ist.

(d) Kann es ein Beispiel wie in Teil (c) für $V = \mathbb{R}^2$ geben? (Begründe die Antwort.)

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Anwendungen der Dimensionsformel für lineare Abbildungen*
Sei K ein Körper und seien $U_1, U_2 \subset V$ lineare Unterräume eines K-Vektorraums V.

(a) Verwende die Dimensionsformel für lineare Abbildungen (angewendet auf eine geeignete lineare Abbildung), um die Formel $\dim_K(V/U_1) = \dim_K(V) - \dim_K(U_1)$ zu zeigen.

(b) Man betrachte die Abbildung:

$$f : U_1 \oplus U_2 \longrightarrow V, \quad (u_1, u_2) \mapsto u_1 - u_2.$$

Zeige, dass f eine lineare Abbildung ist.

(c) Benutze die Dimensionsformel für die lineare Abbildung f, um die Dimensionsformel für lineare Unterräume von V zu zeigen:

$$\dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) = \dim_K(U_1 + U_2) + \dim_K(U_1 \cap U_2).$$

(Die Dimensionsformel für lineare Unterräume wurde in der Vorlesung auf direktem Weg gezeigt; dieses Resultat darf bei dieser Aufgabe natürlich nicht verwendet werden.)

Bitte wenden.

Abgabe ist am **Freitag 16. Dezember 2016**, vor (!) der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr.

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Projektoren*
Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Eine K-lineare Abbildung $p : V \longrightarrow V$ heit *Projektor*, falls $p \circ p = p$.

(a) Man betrachte das Beispiel des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Konstruiere für jedes $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ einen Projektor $p_n : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{im}(p_n)) = n$.

(b) Sei nun V ein beliebiger K-Vektorraum und $p : V \longrightarrow V$ ein Projektor. Man zeige:

$$V = \ker(p) + \mathrm{im}(p) \quad \text{und} \quad \ker(p) \cap \mathrm{im}(p) = 0.$$

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Vektorräume, isomorph zu echten Quotienten?*
Konstruiere ein Beispiel eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V zusammen mit einem nichttrivialen Untervektorraum $0_V \neq U \subset V$, sodass es einen Isomorphismus $f : V/U \xrightarrow{\sim} V$ gibt. Kann es ein solches Beispiel für $\dim_{\mathbb{R}}(V) < \infty$ geben? (Begründe die Antwort.)

Allgemeine Bemerkungen:

- **Wichtig:** Die Abgabe ist ab jetzt auch in Gruppen von zwei oder drei Personen erlaubt; allerdings muss ersichtlich sein, dass jedes Mitglied der Gruppe die Lösung von mindestens einer Aufgabe aufgeschrieben hat. Bitte vergessen Sie dabei nicht den **Name und die Nummer des Tutoriums** von jedem Gruppenmitglied auf dem abgegebenen Blatt anzugeben, sodass die Punkte aller Mitglieder richtig eingetragen werden können.
- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Sätze und Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.
- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten (schreied@math.uni-bonn.de).
- Die neuen Übungsblätter können immer Freitags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden: `http://www.math.uni-bonn.de/ag/la2016/LA1.htmpl`
- Lösungen zu den Übungszettel müssen Freitags **vor der Vorlesung**, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden.

  Die Teilnehmer der Tutorien 5, 6, 7 und 8 werden gebeten, die Übungszettel direkt bei Ihrem Tutor während des Freitags Tutoriums von 8:00-10:00 Uhr abzugeben.
- Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.
- Für die Zulassung zur Klausur sind **mindestens 50%** der Übungspunkte erforderlich.
- Es wird ein **Help Desk** für Fragem zur Vorlesung und den Übungen angeboten. Dort steht Ihnen Montags 15:00–18:00 sowie Donnerstags 14:00–17:00 Uhr jeweils im Raum N1.002 (Endenicher Allee 60, Nebengebäude) ein Student eines höheren Semesters für Fragen zur Verfügung.
- Mehr Details finden Sie auf der oben genannten Homepage der Vorlesung.