Vorwort

Die drei Arbeiten in diesem Heft der Bonner mathematischen Schriften sind Ergebnis einer Vortragsveranstaltung über komplexe Analysis, die anläßlich meiner Emeritierung im Februar 2006 in Bonn stattfand. Die Arbeiten von Joachim Michel und mir geben im wesentlichen die jeweiligen Vorträge wieder; Christine Laurent-Thiébaut hat anstelle ihres Vortrages einen Übersichtsartikel zur Theorie der tangentialen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen verfaßt. Im einzelnen:

Der erste Artikel über das Levische Problem zeichnet eine Entwicklung nach, die die komplexe Analysis wesentlich beeinflußt hat; neben ideengeschichtlichen und biographischen Teilen enthält er auch eine auf meiner eigenen Arbeit beruhende Lösung des Problems. Genau wie Joachim Michel in der folgenden Arbeit wende ich mich auch an Nichtexperten.

Joachim Michels Artikel führt einen neuen Konvexitätsbegriff in die komplexe Analysis ein und untersucht ihn im Zusammenhang mit der Regularität der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Mit Rücksicht auf den Hörerkreis des damaligen Vortrages ist die Darstellung möglichst "technikfrei" gehalten.

Abschließend stellt Christine Laurent-Thiébaut den heutigen Forschungsstand zur Theorie von Fundamentallösungen für den tangentialen Cauchy-Riemann-Operator dar. Dieser Artikel, der technisch anspruchsvoller als die beiden vorangehenden ist, sollte als Ausgangspunkt für weitere Forschungen von Nutzen sein.

Die drei Arbeiten sind voneinander unabhängig, aber durchaus aufeinander bezogen: Konvexitätsbegriffe, Regularitäts- und Existenzsätze für die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, auch die tangentialen, Randgeometrie, Integraldarstellungen sind Leitbegriffe in allen drei Artikeln, Begriffe, die in zunehmend komplexeren Zusammenhängen verwandt werden.

Oktober 2007, Ingo Lieb

Inhalt

DAS LEVISCHE PROBLEM

INGO LIEB

Meiner Frau gewidmet

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die fundamentalen Entdeckungen von Fritz Hartogs und Eugenio Elia Levi (1906/1911) haben die komplexe Analysis für ein volles Jahrhundert wesentlich beeinflußt: sie führten zu neuen Ergebnissen, neuen wirkungsvollen Methoden und - vielleicht noch wichtiger! - zu immer neuen fruchtbaren Fragestellungen. In dieser - durchaus persönlich gefärbten - Erzählung will ich den Gang der Entwicklung nachzeichnen und auch einige der handelnden Personen vorstellen.

1. Der Kugelsatz

Die Geschichte beginnt 1906 [19], vor nunmehr 100 Jahren. In diesem Jahr veröffentlichte F. Hartogs seine Resultate zur simultanen analytischen Fortsetzung. Hier ist ein typisches Ergebnis:

Theorem 1 *(Kugelsatz). Es sei*

$$\mathcal{G} = K_1 - \overline{K}_2, \quad K_j = \{z\colon \|z\| < r_j\},\ 0 < r_2 < r_1,$$

eine Kugelschale im $\mathbb{C}^n$, $n > 1$. *Dann ist jede auf* $\mathcal{G}$ *holomorphe Funktion* f *holomorph nach* K_1 *fortsetzbar.*

Zum Beweis betrachtet Hartogs zunächst die Differenz zweier Dizylinder, etwa

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}, \\ D_2 &= \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1/2, |z_2| < 1/2\}, \\ D &= D_1 \setminus \overline{D_2}, \end{aligned}$$

und beweist für diese Konfiguration den entsprechenden Fortsetzungssatz mittels der Cauchyschen Integralformel. Das ist fast unmittelber ersichtlich:

Es sei f holomorph auf D. Wir wählen

$$z = (z_1, z_2) \quad \text{mit} \quad 1/2 < |z_j| < 1, \quad j = 1, 2\ ,$$

ferner $|z_1| < r_1 < 1$, $|z_2| < r_2 < 1$, und haben zunächst

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_2| = r_2} \frac{f(z_1, \zeta_2)}{\zeta_2 - z_2} d\zeta_2,$$

dann

$$f(z_1, \zeta_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1| = r_1} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1,$$

beide Male nach der 1-dimensionalen Cauchyschen Integralformel.

Also ist
$$f(z_1, z_2) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\substack{|\zeta_1|=r_1 \\ |\zeta_2|=r_2}} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} d\zeta_1 d\zeta_2.$$
Die rechte Seite ist aber auf ganz $\overline{D_2}$ definiert und holomorph - die Formel liefert also die gewünschte Fortsetzung. Der Fall $n > 2$ erfordert nur mehr Schreibarbeit.

Um von diesem Resultat zum Kugelsatz zu gelangen, entwickelt Hartogs eine kunstvolle geometrische Argumentation - siehe [19]; sehr viel schneller gelangt man heute zum Ziel mittels der Bochner-Martinellischen Integralformel. Das will ich nun ausführen. Zunächst einige Vorbereitungen:

Es sei $\alpha(\zeta, z)$ eine doppelte Differentialform vom Typ $(1, 0; 0, 0)$ auf einer offenen Teilmenge $W \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ (mit den Koordinaten ζ und z), also

$$\alpha(\zeta, z) = \sum_{j=1}^{n} a_j(\zeta, z) d\zeta_j, \tag{1.1}$$

wobei die a_j hinreichend oft differenzierbare Funktionen auf W sind. Wir bilden mittels α die Doppelformen

$$\Omega_0^\alpha(\zeta, z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \alpha \wedge \left(\overline{\partial}_\zeta \alpha\right)^{n-1} \tag{1.2}$$

$$\Omega_1^\alpha(\zeta, z) = (n-1) \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \alpha \wedge \left(\overline{\partial}_\zeta \alpha\right)^{n-2} \wedge \overline{\partial}_z \alpha \tag{1.3}$$

vom Typ $(n, n-1; 0, 0)$ bzw. $(n, n-2; 0, 1)$; die Potenzbildung erfolgt durch äußere Multiplikation.

Speziell sei nun

$$\alpha(\zeta, z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j}{\| \zeta - z \|^2} d\zeta_j \overset{def}{=} \beta(\zeta, z), \tag{1.4}$$

und
$$W = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n - \Delta = \{(\zeta, z) : \zeta \neq z\}.$$

Definition 1. *Die Doppelformen*

$$\Omega_q^\beta(\zeta, z) \overset{def}{=} B_{nq}(\zeta, z), \quad q = 0, 1,$$

heißen Bochner-Martinelli-Kerne für $(0, q)$*-Formen (mit* $q = 0, 1$*).*

Ihre Haupteigenschaften sind im folgenden Satz zusammengefaßt:

Theorem 2 *(BM-Integralformel).*

$$a) \quad \overline{\partial}_z B_{n0} = -\overline{\partial}_\zeta B_{n1}$$

$$b) \quad |B_{nq}(\zeta, z)| \leq const \frac{1}{\| \zeta - z \|^{2n-1}}$$

c) Ist $\mathcal{G} \subset\subset \mathbb{C}^n$ *ein stückweise glatt berandetes Gebiet und* f *eine auf* $\overline{\mathcal{G}}$ *stetige, in* $\mathcal{G}$ *holomorphe Funktion, so ist für* $z \in \mathcal{G}$*:*

$$f(z) = \int_{b\mathcal{G}} f(\zeta) B_{n0}(\zeta, z).$$

B_{10} ist also der Cauchy-Kern

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{d\zeta}{\zeta - z},$$

und Theorem 2c liefert im Falle $n = 1$ die Cauchysche Integralformel. Beachte, daß $B_{11} \equiv 0$ ist, m. a. W.: der Cauchykern ist holomorph in z. Für $n > 1$ ist Theorem 2a aber schwächer: B_{n0} ist nicht mehr holomorph im Parameter! – Für beliebiges n findet man die Beweise z. B. in [24] oder [33].

Im folgenden bezeichnen wir die Algebra der auf einer Menge M holomorphen Funktionen immer mit $\mathcal{O}(M)$. Wir kommen nun zum Beweis des Kugelsatzes.

Es sei f holomorph auf $\mathcal{G}$; wir dürfen (durch Verkleinern von $\mathcal{G}$) sogar $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathcal{G}})$ annehmen. Nach Theorem 2c) ist für $z \in \mathcal{G}$ dann

$$f(z) = \int_{bK_1} f(\zeta) B_{n0}(\zeta, z) - \int_{bK_2} f(\zeta) B_{n0}(\zeta, z) \overset{def}{=} f_1(z) - f_2(z).$$

Die Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ sind auf ganz K_1 bzw. dem gesamten Komplement von $\overline{K}_2$ differenzierbar; ferner hat man wegen Theorem 2a) und der Holomorphie von f, d.h. wegen $\overline{\partial} f = 0$:

$$\begin{aligned}\overline{\partial} f_j(z) &= \int_{bK_j} f(\zeta)\overline{\partial}_z B_{n0}(\zeta, z) = -\int_{bK_j} f(\zeta)\overline{\partial}_\zeta B_{n1}(\zeta, z) \\ &= -\int_{bK_j} d_\zeta(f(\zeta)B_{n1}(\zeta, z)) = 0.\end{aligned}$$

Somit ist f_j holomorph, $j = 1, 2$. Schließlich folgt aus Theorem 2b)

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in H}} f_2(z) = 0$$

für jede mindestens 1-dimensionale Hyperebene H, welche $\overline{K}_2$ nicht trifft, und damit $f_2|H \equiv 0$. Da für $n > 1$ solche Hyperebenen existieren und ihre Vereinigung offene nichtleere Mengen enthält, ist $f_2 \equiv 0$, und durch f_1 wird f wie gewünscht nach K_1 fortgesetzt.

Natürlich läßt sich Theorem 1 in naheliegender Weise verallgemeinern - vgl [24], [33]; die Formulierung von Theorem 1 ist aber besonders einprägsam.

2. Holomorphiegebiete

Das Fortsetzungsphänomen des Kugelsatzes wirft die Frage auf, für welche Konfigurationen es noch besteht. Wir benötigen eine Reihe von Begriffen.

Definition 2. *Es sei $\mathcal{G}$ ein Gebiet. Eine Fortsetzungskonfiguration für $\mathcal{G}$ ist ein Paar offener Mengen U und V mit folgenden Eigenschaften:*
- *i) $\emptyset \neq U \subset \mathcal{G} \cap V$;*
- *ii) V ist zusammenhängend und $V \not\subset \mathcal{G}$.*

Definition 3. *Es sei f holomorph auf $\mathcal{G}$. Eine holomorphe Fortsetzung von f ist ein Tripel $(U, V, \widetilde{f})$, in dem (U, V) eine Fortsetzungskonfiguration ist und wo ferner gilt:*
- *i) $\widetilde{f}$ ist holomorph auf V,*
- *ii) $\widetilde{f} \equiv f$ auf U.*

Jetzt können wir einen zentralen Begriff einführen:

Definition 4. *Es sei f holomorph auf $\mathcal{G}$. $\mathcal{G}$ ist Existenzgebiet von f, wenn es keine holomorphe Fortsetzung von f gibt.*

Scheinbar allgemeiner ist

Definition 5. *$\mathcal{G}$ heißt Holomorphiegebiet, wenn es zu jeder Fortsetzungskonfiguration (U, V) für $\mathcal{G}$ eine auf $\mathcal{G}$ holomorphe Funktion f gibt, die keine holomorphe Fortsetzung $(U, V, \widetilde{f})$ mit dem gegebenen (U, V) besitzt.*

Offenbar ist jedes Existenzgebiet einer holomorphen Funktion ein Holomorphiegebiet. Die Umkehrung ist auch richtig und ergibt sich im Laufe der weiteren Diskussion. Kürzer (und nicht ganz präzise) kann man sagen:

Ist $\mathcal{G}$ Existenzgebiet von f, so kann f über keinen Randpunkt von $\mathcal{G}$ hinaus holomorph fortgesetzt werden; ist $\mathcal{G}$ Holomorphiegebiet, so gibt es zu jedem Randpunkt von $\mathcal{G}$ eine holomorphe Funktion auf $\mathcal{G}$, die über diesen Randpunkt hinaus nicht holomorph fortsetzbar ist. Die Definitionen sind schwerfälliger, da sie die mögliche Mehrdeutigkeit holomorpher Fortsetzung berücksichtigen. In den ersten Arbeiten zu diesem Problemkreis werden Holomorphiegebiete Regularitätsgebiete genannt und durch Definition 4 eingeführt [7].

Kugelschalen im $\mathbb{C}^n$, für $n > 1$, sind nach dem Kugelsatz keine Holomorphiegebiete, Kugeln aber, allgemeiner konvexe Gebiete, sind, wie leicht zu sehen, Holomorphiegebiete. In der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ ist jedes Gebiet Holomorphiegebiet - daher taucht der Begriff in der Theorie einer Variablen auch nicht auf.

Als zentrale Frage ergibt sich nun: Wie lassen sich Holomorphiegebiete "erkennen"?
Natürlich muß diese Frage präzisiert werden.

3. Glatte Gebiete

Eine erste Präzisierung beruht auf den Arbeiten des italienischen Mathematikers E.E. Levi (1910/1911) und bezieht sich auf glatte Gebiete im Raum $\mathbb{C}^2$ von 2 komplexen Veränderlichen.

Definition 6. *Ein Gebiet $\mathcal{G} \subset \mathbb{C}^n$ heißt glatt (berandet) von der Klasse $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, wenn es eine Umgebung U des Randes $b\mathcal{G}$ von $\mathcal{G}$ und eine auf U definierte reellwertige k-mal stetig differenzierbare Funktion r gibt, so daß gilt:*

i) $\mathcal{G} \cap U = \{z \in U : r(z) < 0\}$;
ii) $dr(z) \neq 0$ *für alle* $z \in U$.

Jede derartige Funktion r heißt eine $(\mathcal{C}^k-)$glatte *Randfunktion* für $\mathcal{G}$.

Nach Levi gilt nun [23]:

Theorem 3. *Es sei $\mathcal{G} \subset\subset \mathbb{C}^2$ ein Gebiet mit $\mathcal{C}^2$-glatter Randfunktion r. Wenn $\mathcal{G}$ ein Holomorphiegebiet ist, dann erfüllt r in jedem Randpunkt von $\mathcal{G}$ die Levibedingung*

$$(L) \qquad \det \begin{pmatrix} 0 & r_{\overline{1}} & r_{\overline{2}} \\ r_1 & r_{1\overline{1}} & r_{1\overline{2}} \\ r_2 & r_{2\overline{1}} & r_{2\overline{2}} \end{pmatrix} \leq 0.$$

Dabei habe ich

$$(3.5) \qquad r_{z_j} = r_j, \quad r_{\overline{z}_j} = r_{\overline{j}}, \quad r_{z_j\overline{z}_k} = r_{j\overline{k}},$$

abgekürzt. - Aufgrund dieses Theorems können wir nun die Urfassung des Levischen Problems formulieren:

Levisches Problem. *Sind Gebiete, die der Levi-Bedingung genügen, Holomorphiegebiete?*

Als erster hat anscheinend Otto Blumenthal das Problem formuliert [8] und seine Wichtigkeit erkannt - cf. später.

Bei einem ersten Blick auf das Problem wird man eher eine negative Antwort erwarten: man will von einem Gebiet $\mathcal{G}$ zeigen, daß es ein Holomorphiegebiet ist, und muß dazu globale, d.h. auf ganz $\mathcal{G}$ definierte, holomorphe Funktionen mit gewissen Randeigenschaften konstruieren. Gegeben sind aber lediglich lokale Informationen über den Rand (Krümmungseigenschaften), nämlich die Levi-Bedingung. Der Ausgangspunkt scheint also vom Ziel sehr weit entfernt und vielleicht durch keinen Weg mit dem Ziel verbindbar. Als vorläufig einziger Hinweis, daß das Problem nicht aussichtslos ist, mag der folgende leicht zu beweisende Satz dienen:

Satz 4. *(L) ist unabhängig von der Auswahl der ($\mathcal{C}^2$-glatten) Randfunktion und invariant unter biholomorphen Transformationen.*

4. Nochmals: glatte Gebiete

O. Blumenthal, der ja das Problem unmittelbar im Anschluß an Levi formuliert hatte, gab auch 1912 die scheinbar zu erwartende Antwort auf die gestellte Frage. Sie lautete [8]:

Theorem 5. *NEIN.*

Blumenthal zeigte in der Tat von dem Gebiet $\mathbb{C}^2 - H$, mit

$$H = \{(z_1, z_2) \colon x_1 = 0, \quad x_2 \geq 0\},$$

wobei ich $z_j = x_j + iy_j$ gesetzt habe, daß es kein Holomorphiegebiet ist, aber der Bedingung (L) genügt. Damit war das Problem erst einmal erledigt und blieb es auch für etwa 1 1/2 Jahrzehnte. Die Problemlage änderte sich erst 1927 mit dem Wechsel des jungen Heinrich Behnke von Hamburg nach Münster. Behnke hatte sich in Hamburg mit wichtigen Arbeiten zur Zahlentheorie habilitiert, beschloß aber, als er einen Ruf auf ein Ordinariat nach Münster erhielt, nicht nur den Arbeitsort, sondern auch das Arbeitsgebiet zu wechseln. Auf Anraten Constantin Carathéodorys [4] wählte er die Funktionentheorie mehrerer Variabler als neues Forschungsgebiet. Beim Studium der vorliegenden Resultate (von Cousin, Hartogs, Poincaré, Levi, Blumenthal) stellte er als erstes fest, daß Blumenthals Gegenbeispiel am Problem vorbeiging. Das von Blumenthal konstruierte Gebiet hat nämlich keinen glatten Rand, und das Auftreten von Kanten im Rande führt auf grundsätzlich neue Fragen. Somit ist das Problem zu präzisieren:

Levi-Problem. *Sind* **glatte** *Gebiete, die der Levi-Bedingung genügen, Holomorphiegebiete?*

Und diese Frage war weiterhin unbeantwortet: am Ende des vorigen Abschnittes habe ich auf ihre Schwierigkeit hingewiesen. (Ein von Blumenthal [8] angegebenes Gegenbeispiel $\mathcal{G}$:

$$(|z_1| - 2)^2 + |z_2|^2 < 1$$

beruhte auf einem - schon bald von Blumenthal selbst erkannten - Irrtum: es ist in Wahrheit ein Holomorphiegebiet.) Behnkes Antwort konnte zunächst nur: "vielleicht" heißen, und die Antwort kann man auch ohne mathematische Untersuchung geben.

5. Holomorphiekonvexität und allgemeinere Gebiete

Die Jahre nach 1927 sahen - vor allem durch die Münsteraner Arbeitsgruppe um H. Behnke und durch die Arbeit von Henri Cartan in Paris - wesentliche Fortschritte in der komplexen Analysis, die zu einem besseren Verständnis auch des Levischen Problems beitrugen, ohne es freilich zu lösen. Im einzelnen:

1 *Für spezielle Gebietsklassen wurde das Levi-Problem gelöst.* In der Regel handelt es sich um Gebiete im $\mathbb{C}^2$ mit hoher Symmetrie - Reinhardtsche Gebiete zum Beispiel..., siehe [7]. Die wesentlichen Beiträge hierzu stammen von Behnke und seinen Schülern.

2 Henri Cartan führte den Begriff der *Holomorphie-Konvexität* ein [10] und benutzte ihn in einer gemeinsamen fundamentalen Arbeit mit Peter Thullen [11] zur Charakterisierung von Holomorphiegebieten. Ich gebe die Definition in möglichst einfacher Gestalt, aber gleich für komplexe Räume:

Definition 7. *Ein komplexer Raum X ist holomorph-konvex, wenn es zu jeder Punktfolge $x_j \in X$ ohne Häufungspunkt eine holomorphe Funktion f auf X gibt, die auf der Folge x_j unbeschränkt ist.*

Cartan und Thullen zeigen nun [11]:

Theorem 6. *Für ein Gebiet $\mathcal{G}$ im $\mathbb{C}^n$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) $\mathcal{G}$ ist Existenzgebiet einer holomorphen Funktion.
ii) $\mathcal{G}$ ist Holomorphiegebiet.
iii) $\mathcal{G}$ ist holomorph konvex.

Wegen der Mehrdeutigkeit der holomorphen Fortsetzung formulieren sie ihren Satz gleich für unverzweigte Riemannsche Gebiete über dem $\mathbb{C}^n$, allerdings überträgt sich ihr Beweis nur auf "endlichblättrige" Gebiete. Ich komme auf das Problem später zurück, gebe aber die relevanten Definitionen.

Definition 8. *Ein (unverzweigtes) Riemannsches Gebiet (über dem $\mathbb{C}^n$) ist eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit X, auf der die holomorphen Funktionen die Punkte trennen, zusammen mit einer lokal biholomorphen Abbildung*

$$p\colon X \to \mathbb{C}^n.$$

Jedes Gebiet im $\mathbb{C}^n$ kann als Riemannsches Gebiet angesehen werden, mit p als Inklusionsabbildung. Die Fasern $p^{-1}(z)$ eines Riemannschen Gebietes sind diskrete Teilmengen von X, das Supremum der Mächtigkeiten der Fasern ist die *Blätterzahl* (endlich oder abzählbar unendlich).

Ein Riemannsches Gebiet (X, p) heißt *Teilgebiet* des Riemannschen Gebietes (X', p'), wenn $X \subset X'$ offen ist und $p' \mid X = p$ gilt. (X', p') heißt *Erweiterung* von (X, p), wenn darüberhinaus noch die Restriktionsabbildung

$$\mathcal{O}(X') \to \mathcal{O}(X)$$

bijektiv ist. In sinnvoller Verallgemeinerung von Definition 5 setzen wir jetzt fest:

Definition 9. *Ein Holomorphiegebiet ist ein Riemannsches Gebiet, welches keine echte Erweiterung besitzt.*

Damit läßt sich Theorem 6 auch für Riemannsche Gebiete formulieren - wie Cartan und Thullen es ja getan haben. Ihr Beweis enthält aber im Falle unendlichblättiger Riemannscher Gebiete eine Lücke, die erst Oka - siehe später - geschlossen hat.

Ist x ein Punkt eines Riemannschen Gebietes (X, p), so gibt es definitionsgemäß einen Polyzylinder $\Delta_\epsilon(p(x))$ vom Radius ϵ in jeder Koordinate und eine Umgebung von x, $\Delta_\epsilon(x)$, die unter p biholomorph auf $\Delta_\epsilon(p(x))$ abgebildet wird. Wir nennen auch $\Delta_\epsilon(x)$ einen Polyzylinder in X um x vom Radius ϵ und geben die für später wichtige

Definition 10. *Die Funktion*

$$\delta_X(x) = \sup\{\epsilon \colon \exists \, \textit{Polyzylinder} \, \Delta_\epsilon(x)\}$$

heißt Randdistanz von x.

Es ist also $0 < \delta(x) \leq \infty$.

3 Einen weiteren wesentlichen Fortschritt erzielten Behnke und Karl Stein 1939 [5]:

Theorem 7. *Es sei $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \cdots \subset \mathbb{C}^n$ eine aufsteigende Folge von Holomorphiegebieten. Dann ist*

$$\mathcal{G} = \bigcup \mathcal{G}_j$$

ebenfalls ein Holomorphiegebiet.

Dieser Satz vereinfacht das Studium von Holomorphiegebieten erheblich, wie wir noch sehen werden.

4 Die Levi-Bedingung war ja nur für glatte Gebiete im $\mathbb{C}^2$ formuliert worden. In seiner 1933 bei Helmut Kneser in Greifswald angefertigten Dissertation [21] übertrug Johannes Krzoska die Bedingung nun auf beliebige Dimensionen. Ich formuliere hier gleich etwas allgemeiner:

Definition 11. *i) Es sei $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ eine 2 mal stetig differenzierbare reellwertige Funktion auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}^n$. Die Leviform von φ in z ist die hermitesche Form*

$$L_\varphi(z;t) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{i\bar{j}}(z)t_i\bar{t}_j.$$

(Bezeichnungen siehe (3.5)*).*

ii) φ heißt in z plurisubharmonisch, wenn $L_\varphi(z)$ positiv semidefinit ist, streng plurisubharmonisch, wenn L_φ in z positiv definit ist.

Definition 12. *Es sei $\mathcal{G}$ ein $\mathcal{C}^2$-glattes Gebiet im $\mathbb{C}^n$ mit $\mathcal{C}^2$-glatter Randfunktion r. $\mathcal{G}$ heißt pseudokonvex, wenn in allen Randpunkten $z \in b\mathcal{G}$ die Leviform $L_r(z)$ auf dem holomorphen Tangentialraum an $b\mathcal{G}$ in z positiv semidefinit ist.*

Ausführlich: für alle $z \in b\mathcal{G}$ und alle $t \in \mathbb{C}^n$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} r_i(z)t_i = 0$$

ist

$$\sum_{i,j=1}^{n} r_{i\bar{j}}(z)t_i\bar{t}_j \geq 0.$$

Das ist die - von Krzoska gefundene - Levi-Bedingung im $\mathbb{C}^n$. Für $n = 2$ reduziert sie sich, wie man leicht sieht, auf die Bedingung (L) von Theorem 3. Eine Weile wurde die obige Bedingung auch "Levi-Krzoska-Bedingung" genannt, das hat sich aber nicht durchgesetzt. In Analogie zu Theorem 3 gilt nach Krzoska [21]:

Theorem 8. *Jedes C^2-glatte Holomorphiegebiet ist pseudokonvex.*

Und man kann nun das Levische Problem allgemeiner fassen:

Levisches Problem (2. Fassung) *Sind (glatte) pseudokonvexe Gebiete Holomorphiegebiete?*

Es handelt sich, wohlgemerkt, immer um (in der Regel beschränkte) Teilgebiete des $\mathbb{C}^n$.

5 Besonders wichtig für die weitere Entwicklung war die Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse in dem berühmten *Ergebnisbericht* von Behnke und Thullen von 1934 [7]. Hier wurde der Stand der Forschung beschrieben, und - was noch einflußreicher war! - die Autoren arbeiten die wesentlichen offenen Probleme sorgfältig heraus. In gewisser Weise war der Ergebnisbericht also bedeutender in seiner Rolle als ein "Nichtergebnis- Bericht". Auf die Hauptprobleme in "Behnke/Thullen" gehe ich etwas später ein - das Levische Problem jedenfalls gehörte dazu.

Trotz all dieser bedeutenden Fortschritte blieb aber das Levische Problem ungelöst. Noch im Jahre 1940 gaben Behnke und Stein in einem Artikel "Die Konvexität in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen" [6] das Problem als eine der großen ungelösten Aufgaben der komplexen Analysis an. Obwohl sie sich sehr vorsichtig ausdrückten, scheint es fast so, als ob sie auch nicht an eine positive Antwort glaubten.

6. Kiyoshi Oka

Ohne daß Behnke und Stein es realisiert hätten, hatte der Strom der komplexen Analysis sein Bett verlagert, von Münster und Paris auf einen neuen Kontinent, nach Hiroshima. Was war geschehen?

Im Jahre 1929 war ein junger japanischer Mathematiker, Kiyoshi Oka, mit einem Stipendium seiner Regierung nach Paris gekommen, um dort die neusten Fortschritte der Analysis kennen zu lernen. In Paris hatte er Kontakt zu Gaston Julia und ließ sich von diesem für die komplexe Analysis begeistern. Nach Japan zurückgekehrt, studierte er den Ergebnisbericht von Behnke und Thullen - und faßte anscheinend den Entschluß, die Hauptprobleme der komplexen Analysis, so wie sie sich aus diesem Bericht ergaben, zu lösen. Nun mag es häufiger vorkommen, daß ein junger Wissenschaftler sich ein derart abenteuerliches Ziel setzt: selten dürfte er es erreichen.

Genau das aber tat Oka. In einer Reihe von Arbeiten, die sich über zwei Jahrzehnte erstrecken und die in ihrer Gesamtheit ein intellektuelles Kunstwerk von bemerkenswerter Schönheit darstellen, löste er die Fundamentalprobleme der komplexen Analysis und erweiterte das Forschungsgebiet nicht nur durch seine neuen Resultate, sondern auch durch neue, erst aufgrund dieser Ergebnisse mögliche Fragestellungen [27]. Eines der gelösten Probleme, sicher das schwierigste, ist das Levische Problem.

7. Die Fundamentalprobleme bei Behnke/Thullen

Betrachten wir nun die Hauptprobleme, die sich 1934 in der komplexen Analysis stellten und im Ergebnisbericht [7] auch als wesentlich herausgearbeitet worden waren. Alle auftretenden Gebiete $\mathcal{G}, \mathcal{G}_0, \cdots$ sollen Holomorphiegebiete sein.

1. Das erste Cousinsche Problem, also die *Konstruktion einer meromorphen Funktion aus gegebenen Hauptteilen.* Genauer:

es sei $\{U_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von $\mathcal{G}$, die m_i seien meromorphe Funktionen auf den U_i, so daß

$$m_{ij} = m_j - m_i$$

auf $U_{ij} = U_i \cap U_j$ holomorph ist. Gibt es eine meromorphe Funktion m auf $\mathcal{G}$, so daß

$$m - m_i$$

auf U_i holomorph ist?

2. Das zweite Cousinsche Problem: *ist jeder Divisor auf $\mathcal{G}$ ein Hauptdivisor?* Man formuliert genau wie oben, ersetzt Addition durch Multiplikation und "holomorph" durch "holomorph ohne Nullstellen".

3. Approximationssätze vom Rungeschen Typ: *es sei $\mathcal{G} \subset\subset \mathcal{G}_0$; unter welchen Bedingungen ist $\mathcal{O}(\mathcal{G}_0)$ dicht in $\mathcal{O}(\mathcal{G})$*, d.h. wann ist jede auf $\mathcal{G}$ holomorphe Funktion lokal gleichmäßig durch auf $\mathcal{G}_0$ holomorphe Funktionen approximierbar?

4. Das Levische Problem: *Charakterisiere Holomorphiegebiete durch lokale Randeigenschaften.*

Alle diese Probleme hängen miteinander zusammen; vereinfacht ausgedrückt: man löst entweder alle oder keins. Hierüber ist sich Oka von Anfang an im klaren. In den Einleitungen zu seinen Arbeiten legt er jeweils Rechenschaft ab über den Punkt, den er auf seinem Weg erreicht hat, einem Weg, dessen Ziel er nie aus den Augen verliert und das er schließlich (siehe [29], [31]) erreicht.

8. Die Oka-Abbildung

Die Originalität von Okas Methoden wird bereits zu Beginn der ersten Arbeit [28] offensichtlich. Ich zitiere: "Or, je m'aperçois qu'on peut parfois diminuer la difficulté de ces problèmes, en élevant à dimensions convenables les espaces où l'on s'occupe... un principe qui réduit les domaines du titre aux domaines cylindriques à dimensions plus élevées...".

Als Beispiel betrachte ich das analytische Polyeder

$$P = \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1, |z_2| < 1, |z_1 z_2| < 1/2\}$$

im $\mathbb{C}^2$. Durch die reguläre Abbildung

$$\omega(z_1, z_2) = (z_1, z_2, 2z_1 z_2)$$

wird P bijektiv auf eine singularitätenfreie abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des Einheitspolyzylinders $D_3 \subset \mathbb{C}^3$ abgebildet, das Studium des niedrigdimensionalen Gebietes P mit seinem komplizierten Rand damit auf die Untersuchung des einfacher berandeten höherdimensionalen Gebietes D_3 und seiner Untermannigfaltigkeiten zurückgeführt. (Eine ähnliche Idee ist die bekannte Umwandlung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung.) Eine solche "Oka-Abbildung" taucht in vielen Varianten in der komplexen Analysis auf; es ist kaum übertrieben, sie als Start einer Entwicklung anzusehen, die der komplexen Analysis neue Felder erschlossen hat.

9. Okas Lösung des Levischen Problems

Schon zur Formulierung von Okas Resultaten müssen wir den Begriff der plurisubharmonischen Funktion verallgemeinern, und damit auch den Begriff der Pseudokonvexität. Wir befreien uns von Differenzierbarkeitsvoraussetzungen.

Definition 13. *Eine Funktion $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$, U offen im $\mathbb{C}^n$, heißt plurisubharmonisch, wenn sie nach oben halbstetig ist und für jede komplexe Gerade L gilt:*

$$\varphi \mid L \cap U \quad \textit{ist subharmonisch.}$$

Dabei gilt auch die Funktion $\varphi \equiv -\infty$ als subharmonisch.

Obwohl die Definition scheinbar die affine Struktur des $\mathbb{C}^n$ ausnutzt, ist die Klasse der plurisubharmonischen Funktionen biholomorph invariant und kann daher auf komplexen Räumen betrachtet werden. Damit ist die nächste Definition sinnvoll:

Definition 14. *Ein Riemannsches Gebiet X ist pseudokonvex, wenn die Funktion*

$$-\log \delta_X,$$

mit $\delta_X(x)$ als Randdistanz des Punktes x, plurisubharmonisch ist.

Eine Funktion der Klasse $\mathcal{C}^2$ ist genau dann plurisubharmonisch gemäß Definition 13, wenn sie positiv semidefinite Leviform besitzt; die frühere Definition ist also sinnvoll verallgemeinert worden. Entsprechend ist ein glattes Gebiet genau dann gemäß Definition 14 pseudokonvex, wenn es der Levi Bedingung genügt, vgl. [33].

Plurisubharmonische Funktionen sind von Oka [29] eingeführt worden, nachdem subharmonische Funktionen schon bei Hartogs in der komplexen Analysis auftauchen. Oka und insbesondere Pierre Lelong [22] haben diese Funktionsklasse dann eingehend untersucht.

Jetzt kann ich formulieren:

Levisches Problem (3. Fassung). *Sind pseudokonvexe Riemannsche Gebiete holomorph-konvex?*

Aus den Arbeiten von Cartan und Thullen entnimmt man nämlich

Theorem 9. *Holomorph-konvexe Riemannsche Gebiete sind pseudokonvex.*

Oka zeigt nun die Umkehrung [29], [31].

Theorem 10. *(Oka) Für ein Riemannsches Gebiet X sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) X ist holomorph-konvex.
ii) X ist Holomorphiegebiet.
iii) X ist pseudokonvex.

Zusammen mit Theorem 9 ist damit auch die Beweislücke bei Cartan und Thullen geschlossen.

Das obige Theorem hat Oka zunächst (1942) nur für Teilgebiete des $\mathbb{C}^2$ bewiesen, aber schon damals auf die Verallgemeinerungsmöglichkeit aufmerksam gemacht. Zehn Jahre später geht er zum Allgemeinfall über (1953); eigene Lösungen des Levischen Problems (für Teilgebiete des $\mathbb{C}^n$) erzielten auch François Norguet [26] und Hans Bremermann [9] im Jahre 1954.

Ich gebe zu Okas Beweis einige Hinweise. Ausgangspunkt ist ein altes Ergebnis von Pierre Cousin, das

Cousinsche Heftungslemma. *Es sei $R \subset \mathbb{C}$ ein achsenparalelles Rechteck*

$$R = \{z_1 = x_1 + iy_1 : a_1' < x_1 < a_1'',\ b_1' < y_1 < b_1''\},$$

$U \subset \mathbb{C}^{n-1}$ ein beliebiges Gebiet, $Q = R \times U \subset \mathbb{C}^n$. $c_+ < c_-$ seien reelle Zahlen mit

$$a_1' < c_+ < c_- < a_1'',$$
$$R_+ = \{z_1 \in R : c_+ < x_1\},\ R_- = \{z_1 \in R : x_1 < c_-\},$$

also $R = R_+ \cup R_-$. Es sei $R_0 = R_+ \cap R_-$, endlich

$$Q_+ = R_+ \times U,\ Q_- = R_- \times U,\ Q_0 = R_0 \times U.$$

(Damit ist also $Q = Q_+ \cup Q_-$, $Q_0 = Q_+ \cap Q_-$.)

Dann gilt: es gibt eine Konstante M, so daß zu jeder beschränkten holomorphen Funktion f_0 auf Q_0 holomorphe Funktionen f_+ auf Q_+, f_- auf Q_- existieren mit:

i) $f_0 = f_+ - f_-$ *auf* Q_0
ii) $|f_\pm|_{Q_\pm} \leq M|f_0|_{Q_0}$.

Dabei bezeichnet $|\cdot|$ die Supremumsnorm. Zum Beweis siehe [18]. Für die Anwendungen sind die Abschätzungen besonders nützlich. Cousin hat das Lemma in etwas schwächerer Form bewiesen; es ist ein wesentlicher Schritt auf dem Weg zur Lösung des ersten Cousinschen Problems.

Okas Lösung beruht auf dem folgenden neuen

Verschmelzungslemma. *Es sei $\mathcal{G} \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $a_+ < a_-$ reelle Zahlen,*

$$\mathcal{G}_+ = \{z \in \mathcal{G} :\ \operatorname{Im} z_1 > a_+\}, \quad \mathcal{G}_- = \{z \in \mathcal{G} :\ \operatorname{Im} z_1 < a_-\}.$$

Wenn $\mathcal{G}_+$ und $\mathcal{G}_-$ Holomorphiegebiete sind, dann auch $\mathcal{G}$.

Und dieser Satz verwendet das folgende technische Lemma, in dem man leicht eine Verallgemeinerung und Abwandlung des Cousinschen Heftungslemmas erkennt:

Okas Heftungslemma. *In der Situation des Verschmelzungslemmas sei* $a_+ < a < a_-$,

$$S = \{z \in \mathcal{G} \colon \operatorname{Im} z_1 = a\}.$$

Dann gibt es zu jeder in einer Umgebung von S *holomorphen Funktion* f *holomorphe Funktionen* f_+ *auf* $\mathcal{G}_+$, f_- *auf* $\mathcal{G}_-$, *so daß in einer Umgebung von* S *gilt:*

$$f = f_+ - f_-.$$

Der Beweis benutzt fast alle wesentlichen vorher von Oka erzielten Ergebnisse.

10. Komplexe Mannigfaltigkeiten und komplexe Räume

Okas Ergebnisse bilden einen Abschluß, aber auch einen Neubeginn. Hierüber war sich Oka selbst durchaus im klaren. Ich zitiere: "Or, nous, devant le beau système de problèmes à F. Hartogs et aux successeurs, voulons léguer des nouveaux problèmes à ceux qui nous suivront; or, comme le champs de fonctions analytiques de plusieurs variables s'étend heureusement aux divers branches de mathématiques, nous serons permis de rêver divers types de nouveaux problèmes préparant.“ [30]

Durch Okas eigene Arbeiten, mehr vielleicht noch durch die Beiträge von Cartan, Behnke, Stein, Jean-Pierre Serre, Hans Grauert und Reinhold Remmert, verlagerte sich das Interesse von Riemannschen Gebieten auf komplexe Mannigfaltigkeiten und komplexe Räume. Zu den plurisubharmonischen Funktionen trat als neues und hochwirksames Werkzeug die analytische Garbentheorie hinzu. Das Levische Problem wird mit diesen Methoden neu gelöst und stellt sich in diesem Begriffsrahmen neu. Das will ich nun ausführen.

11. Strenge Pseudokonvexität

H. Grauert erkannte, wie vor ihm bereits Oka, daß streng pseudokonvexe Gebiete ein ideales Werkzeug zum Studium allgemeiner pseudokonvexer Gebiete im $\mathbb{C}^n$ oder sogar auf komplexen Räumen liefern.

Definition 15. *Ein $\mathcal{C}^2$-glattes Gebiet $\mathcal{G} \subset\subset X$ (in einem komplexen Raum X) heißt streng pseudokonvex, wenn es eine streng plurisubharmonische Randfunktion r besitzt.*

Jedes pseudokonvexe Gebiet im $\mathbb{C}^n$, ja sogar jedes pseudokonvexe Riemannsche Gebiet, ist durch streng pseudokonvexe Teilgebiete ausschöpfbar; im Fall Riemannscher Gebiete ist das ein Teil von Okas Beweis von Theorem 10, der Fall “schlichter“ Gebiete ist elementar. Somit genügt aufgrund des Theorems von Behnke und Stein für die meisten Zwecke die Untersuchung streng pseudokonvexer Gebiete. Sie zeichnen sich (ab jetzt will ich der Einfachheit halber nur komplexe Mannigfaltigkeiten zugrundelegen) durch zwei Eigenschaften aus.

a) Zu jedem Randpunkt $x_0 \in b\mathcal{G}$ gibt es eine in einer Umgebung U von x_0 holomorphe Funktion P, so daß, mit

$$S = \{x \in U\colon\ \operatorname{Re} P = 0\},$$

gilt:

$$S \cap \overline{\mathcal{G}} = \{x_0\},$$

und S berührt $b\mathcal{G}$ in x_0 von genau 1. Ordnung. S ist eine “lokale harmonische Stützfläche“. Hierauf gehe ich später noch ein (vgl. Abschnitt 12, Fundamentallemma iii).

b) "C^2-kleine Störungen“ von $\mathcal{G}$ sind wieder streng pseudokonvex.

Grauert nutzt diese beiden Eigenschaften virtuos zum Beweis des folgenden Endlichkeitssatzes: [16]

Theorem 11. *Es sei* $\mathbf{S}$ *eine kohärente analytische Garbe auf einem streng pseudokonvexen Gebiet $\mathcal{G}$. Dann sind die Cohomologievektorräume* $H^q(\mathcal{G}, \mathbf{S})$ *für $q \geq 1$ endlichdimensional:*

$$\dim_{\mathbb{C}} H^q(\mathcal{G}, \mathbf{S}) < \infty,\ \ q \geq 1.$$

Als Folgerung ergibt sich (siehe auch den nächsten Abschnitt)

Folgerung 11.1. *Streng pseudokonvexe Gebiete sind holomorph-konvex.*

Eine weitere Folgerung ist Theorem 10, die Lösung des Levischen Problems für Riemannsche Gebiete.

Grauert konstruiert zum Beweis aus $\mathcal{G}$ ein etwas größeres streng pseudokonvexes Gebiet $\widehat{\mathcal{G}} \supset\supset \mathcal{G}$, so daß die Restriktionsabbildung

$$H^q(\widehat{\mathcal{G}}, \mathbf{S}) \to H^q(\mathcal{G}, \mathbf{S}), \quad q \geq 1 \tag{11.6}$$

surjektiv ist. (Dabei nimmt er zunächst $\mathbf{S}$ als über dem ganzen Raum $X \supset \mathcal{G}$ gegeben an). Mit funktionalanalytischen Methoden ergibt sich hieraus der Endlichkeitssatz. Die Konstruktion von $\widehat{\mathcal{G}}$ erfolgt schrittweise, indem zunächst an einem Randpunkt x_0 das Gebiet durch eine kleine “Beule“ so zu einem Gebiet $\mathcal{G}_0$ vergrößert wird, daß für $\mathcal{G}_0$ und $\mathcal{G}$ (11.6) gilt, danach wird $\mathcal{G}_0$ vergrößert, bis man nach endlich vielen Schritten bei $\widehat{\mathcal{G}} \supset\supset \mathcal{G}$ mit (11.6) angekommen ist. Diese Grauertsche Beulenmethode ist ein wesentliches Hilfsmittel beim Übergang von lokalen zu globalen Eigenschaften - sie ist in der Folge immer wieder benutzt worden.

12. Eine Lösung des Levischen Problems

Ich unterbreche für den Moment die Beschreibung der historischen Entwicklung und gebe eine moderne Lösung des Levischen Problems; sie beruht auf Methoden und Ideen von Gennadi Henkin, Michael Range, mir selbst und anderen. Nach Behnke und Stein genügt es, Folgerung 11.1 zu zeigen, also

Theorem 12. *Streng pseudokonvexe Gebiete sind holomorph konvex.*

Wir nehmen zunächst $\mathcal{G} \subset\subset \mathbb{C}^n$ an.

1. Schritt. Es sei

$$\begin{aligned} Z^1 &= \{f \in L^\infty_{01}(\mathcal{G}) \colon \overline{\partial} f = 0\}, \\ B^1 &= \{\overline{\partial} u \in Z^1 \colon u \in L^\infty(\mathcal{G})\}, \\ H^1 &= Z^1/B^1. \end{aligned} \tag{12.7}$$

Dabei ist L^∞ der Raum der i.w. beschränkten meßbaren Funktionen auf $\mathcal{G}$, $L^\infty_{0,1}$ der Raum der $(0,1)$-Formen auf $\mathcal{G}$ mit Koeffizienten in L^∞, und der $\overline{\partial}$-Operator ist im Distributionssinne zu verstehen.

Wir werden - im 3. Schritt des Beweises - lineare stetige Operatoren P_1 und S_0 konstruieren, die folgende Eigenschaften haben:

$$P_1 \colon Z^1 \to Z^1, \quad S_0 \colon Z^1 \to L^\infty \tag{12.8}$$

$$P_1 \textit{ ist kompakt.} \tag{12.9}$$

$$id = P_1 + \overline{\partial} S_0 \tag{12.10}$$

Aus (12.9) und (12.10) ergibt sich sofort:

$$B^1 \supset \text{Bild } (id - P_1), \tag{12.11}$$

und beide Räume sind abgeschlossen von endlicher Codimension (nach Banach/Schauder). Somit haben wir das Zwischenergebnis

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1 < \infty. \tag{12.12}$$

2. Schritt. Nun verwenden wir Eigenschaft a) der strengen Pseudokonvexität. Es sei $z_0 \in b\mathcal{G}$ ein Randpunkt, und durch $\operatorname{Re} P = 0$ werde eine lokale harmonische Stützfläche definiert; wir setzen dann $F = 1/P$. Indem wir F mittels einer glatten Verheftungsfunktion fortsetzen, erhalten wir eine Funktion f mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{gathered} f \in C^\infty(\overline{\mathcal{G}} - \{z_0\}), \\ f \textit{ ist holomorph in } U(z_0) \cap \mathcal{G}, \\ \textit{wobei } U \textit{ Umgebung von } z_0 \textit{ ist,} \\ \lim\nolimits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty. \end{gathered} \tag{12.13}$$

Die Formen $F_k = \overline{\partial} f^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ gehören dann zu Z^1, sind also linear abhängig modulo B^1. Somit gibt es Konstanten $c_1, \ldots, c_m$, $c_m \neq 0$, und ein $u \in L^\infty$, so daß

$$c_1 F_1 + \cdots + c_m F_m = \overline{\partial} u \tag{12.14}$$

ist.

Setzt man nun

$$h = c_1 f + c_2 f^2 + \cdots + c_m f^m - u,$$

so ist h holomorph auf $\mathcal{G}$ mit

$$\lim_{z \to z_0} |h(z)| = \infty.$$

Das liefert die Holomorphiekonvexität von $\mathcal{G}$.

3. Schritt. Es bleiben P_1 und S_0 zu konstruieren! Es sei r eine streng plurisubharmonische Ranfunktion für $\mathcal{G}$. Dann bilden wir das "Levi-Polynom"

$$\begin{aligned} F(\zeta, z) &= \textstyle\sum_{j=1}^n r_j(\zeta)(\zeta_j - z_j) \\ &\quad -\tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{j,k=1}^n r_{jk}(\zeta)(\zeta_j - z_j)(\zeta_k - z_k) \\ &\overset{def}{=} \textstyle\sum_{j=1}^n F_j(\zeta, z)(\zeta_j - z_j), \end{aligned} \tag{12.15}$$

wählen in $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ eine glatte "Verheftungsfunktion" $\varphi(\zeta, z)$, die $\equiv 1$ in der Nähe der Diagonalen ist, $\equiv 0$ für $\| \zeta - z \|$ groß, und setzen

$$\Phi(\zeta, z) = \varphi(\zeta, z)(F(\zeta, z) - r(\zeta)) + (1 - \varphi(\zeta, z)) \| \zeta - z \|^2 . \tag{12.16}$$

Die Funktion Φ ist für $(\zeta, z) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ mit $|r(\zeta)| \leq \delta$ (klein genug) definiert.

Weiter benötigen wir eine Verheftung des Levipolynoms mit $\| \zeta - z \|^2$:

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(\zeta, z) &= \varphi(\zeta, z) F(\zeta, z) + (1 - \varphi)(\zeta, z)) \| \zeta - z \|^2 \\ &= \textstyle\sum P_j(\zeta, z)(\zeta_j - z_j) \end{aligned} \tag{12.17}$$

und die Differentialform

$$k_0(\zeta, z) = \frac{1}{\Phi(\zeta, z)} \sum_{j=1}^n P_j(\zeta, z) d\zeta_j. \tag{12.18}$$

Mit einer letzten Verheftungsfunktion $\chi(\zeta)$, die identisch 1 in der Nähe von $b\mathcal{G}$ ist, $\equiv 0$ im Innern von $\mathcal{G}$, bilden wir schließlich

$$k(\zeta, z) = \chi(\zeta) k_0(\zeta, z). \tag{12.19}$$

Analog brauchen wir

$$h(\zeta, z) = \frac{1}{\| \zeta - z \|^2 + r(\zeta) r(z)} \sum_{j=1}^{n} (\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j) d\zeta_j. \tag{12.20}$$

Aus (12.19) und (12.20) werden nun die gewünschten Operatoren konstruiert; ich gebe P_1 genau an:

$$P_1 f(z) = \int_{\mathcal{G}} f(\zeta) \wedge \mathcal{P}_1(\zeta, z), \tag{12.21}$$

$$\mathcal{P}_1(\zeta, z) = -\overline{\partial}_\zeta \Omega_1^k(\zeta, z), \tag{12.22}$$

wobei Ω_1^k in Formel (1.3) definiert worden ist (mit $\alpha = k$). Ähnlich ist

$$S_0 f(z) = \int_{\mathcal{G}} f(\zeta) \wedge \mathcal{S}_0(\zeta, z), \tag{12.23}$$

wobei der Kern $\mathcal{S}_0(\zeta, z)$ sich algebraisch in expliziter, aber komplizierter Weise aus $k, h, \overline{\partial}_\zeta k, \overline{\partial}_\zeta h$ sowie dem Bochner-Martinelli-Kern B_{n0} zusammensetzt. Die Begründung, daß nun (12.8), (12.9), (12.10) gelten beruht i.w. auf dem Stokesschen Satz, der Bochner-Martinelli-Integralformel und dem unten angegebenen Fundamentallemma - ich verweise auf [24], [33]. Damit ist der Satz bewiesen.

Zum Beweis einige Anmerkungen!

1. Allen obigen Konstruktionen liegen die folgenden fundamentalen Eigenschaften der Funktion Φ zugrunde, die von Henkin, Grauert und mir entdeckt wurden:

Fundamentallemma. *Für* $\Phi(\zeta, z)$ *aus* (12.16) *gilt:*

i) $\overline{\partial}_z \Phi(\zeta, z) = 0$ *, falls* $\|\zeta - z\|$ *klein genug ist;*

ii) $\Phi(\zeta, \zeta) = 0$ *für* $\zeta \in b\mathcal{G}$*;*

iii) Es gibt eine positive Konstante γ*, so daß gilt*

$$|\Phi(\zeta, z)| \geq \gamma(-r(\zeta) - r(z) + \| \zeta - z \|^2 + |\operatorname{Im} \Phi(\zeta, z)|);$$

iv) $\operatorname{Im} \Phi(\zeta, z)$ *und* $r(\zeta)$ *sind Bestandteile lokaler* C^∞*-Koordinaten in der Nähe von* $z \in b\mathcal{G}$*.*

(Die Eigenschaften i und ii sind aufgrund der Konstruktion klar; wesentlich sind iii und iv).

2. Die Argumentation läßt sich mit einiger Mühe auf streng pseudokonvexe Teilgebiete komplexer Mannigfaltigkeiten übertragen, nicht aber, jedenfalls beim heutigen Stand der Technik, auf komplexe Räume (cf. [24]).

3. Im ersten Schritt hatte ich $\dim H^1 < \infty$ bewiesen. In Wahrheit ist für streng pseudokonvexe Teilgebiete des $\mathbb{C}^n$ oder, allgemeiner, Steinscher Mannigfaltigkeiten diese Dimension sogar 0 - dazu vergleiche man [24], wo im Falle von Mannigfaltigkeiten eine Variante der Oka-Abbildung herangezogen wird. Eine ähnliche Verwendung einer Oka-Abbildung findet sich in diesem Zusammenhang auch bei Range [33].

13. Neue Formen des Levischen Problems

Riemannsche Gebiete sind sehr spezielle komplexe Mannigfaltigkeiten; die Lösung des Levischen Problems charakterisiert die "holomorphe Vollständigkeit" in dieser Klasse. Dieses Ergebnis legt eine Verallgemeinerung der Fragestellung nahe. Zunächst die relevanten Definitionen:

Definition 16. *Ein komplexer Raum X heißt Steinsch oder holomorph vollständig, wenn er holomorph-konvex und lokal holomorph ausbreitbar ist.*

Letzteres bedeutet: zu jedem $x_0 \in X$ gibt es endlich viele holomorphe Funktionen auf X, in deren gemeinsamer Nullstellenmenge x_0 ein isolierter Punkt ist.

Nach obigem ist also ein Riemannsches Gebiet genau dann Steinsch, wenn es pseudokonvex ist. Wir stellen das Levische Problem damit neu:

L1. Levisches Problem für komplexe Räume. *Charakterisiere Steinsche Räume durch "geometrische" Eigenschaften.*

Damit hängt eine zweite Problemstellung zusammen!

L2. Levisches Problem für Teilgebiete. *Es sei $\mathcal{G}$ ein relativ kompaktes Teilgebiet eines komplexen Raumes X. $\mathcal{G}$ sei lokal Steinsch. Ist $\mathcal{G}$ dann holomorph-konvex bzw. sogar Steinsch?*

Definition 17. *$\mathcal{G} \subset\subset X$ heißt lokal Steinsch, wenn es zu jedem Randpunkt $x_0 \in b\mathcal{G}$ eine Umgebung $U = U(x_0)$ so gibt, daß $U \cap \mathcal{G}$ Steinsch ist.*

Nochmals: für Riemannsche Gebiete sind beide Probleme gelöst; die Antwort auf L2 ist "JA".

Eine sehr befriedigende Antwort auf die erste Frage (L1) wurde mit den Grauertschen Methoden durch Raghavan Narasimhan gegeben. Narasimhan war in den frühen 60-er Jahren des letzten Jahrhunderts zur Zusammenarbeit mit Grauert an eines der damaligen Weltzentren der komplexen Analysis nach Göttingen gegangen. Ergebnis dieser Zusammenarbeit war u. a. das folgende fundamentale

Theorem 13. *(Narasimhan* [25]*) Ein komplexer Raum X ist genau dann Steinsch, wenn er eine C^∞-glatte streng plurisubharmonische Ausschöpfungsfunktion φ besitzt.*

Die Mengen $X_c = \{x \in X \colon \varphi(x) < c\}$ sollen also für jedes c relativ kompakt sein. - Dieser Satz ist in einer gemeinsamen Arbeit mit John Erik Fornaess (1980) noch verbessert worden: die Glattheit von φ kann durch die Stetigkeit, sogar durch Halbstetigkeit ersetzt werden; im letzteren Fall muß man natürlich überall $\varphi(x) \neq -\infty$ voraussetzen - vgl. [15], auch für die passende Definition der strengen Plurisubharmonizität.

Die zweite Variante des Levischen Problems (L2) ist zu naiv formuliert: die Antwort ist - fast sofort - "NEIN". Genauer:

Ist X nicht Steinsch, so lautet die Antwort NEIN. Profunde Gegenbeispiele stammen von Grauert - siehe [17].

Ist X eine Steinsche Mannigfaltigkeit, so ist die Antwort JA. [13]

Ist X ein Steinscher Raum, so ist die Antwort noch OFFEN. Teilergebnisse mit positiver Antwort wurden von Aldo Andreotti und Narasimhan [1] erzielt (Steinsche Räume mit isolierten Singularitäten) und kürzlich für Steinsche Räume mit etwas allgemeineren Singularitäten von M. Coltoiu und Klas Diederich [12].

14. Ein allgemeiner Problemkreis

Das Levische Problem hat sich im Laufe eines Jahrhunderts immer wieder neu gestellt: jede Lösung einer Variante des Problems führte zu Neufassungen, die Anlaß zu weiteren Entwicklungen der komplexen Analysis gaben. Das Problem selbst kann in einen größeren Problemkreis eingebettet werden, den ich kurz beschreibe:

Es sei $\mathcal{G}$ ein Teilgebiet des $\mathbb{C}^n$ (oder eines komplexen Raumes). Wie beeinflußt die "komplexe Geometrie" des Randes die "Funktionentheorie" des Gebietes?

Natürlich muß man "komplexe Geometrie" auf $b\mathcal{G}$ richtig entwickeln; auch die Struktur des umgebenden Raumes X wird Einfluß haben, wie wir schon beim Levi-Problem gesehen haben. Jedenfalls wird die Levi-Form der Randfunktion zur komplexen Geometrie der Ränder zu rechnen sein; zur "Funktionentheorie" des Gebietes gehört nicht nur die Algebra aller holomorphen Funktionen, sondern es zählen dazu auch die Algebra der beschränkten holomorphen Funktionen oder der holomorphen Funktionen mit stetigen Randwerten....

Dieses "allgemeinere Levische Problem" beschäftigt seit vier Jahrzehnten viele Mathematiker - ich nenne Joe J. Kohn, G. M. Henkin, K. Diederich, J. E. Fornaess, R. M. Range, auch mich selbst.... Eine ungelöste Variante des Problems formuliere ich mit einer kurzen Erläuterung:

Problem. *Es sei* $\mathcal{G} \subset\subset \mathbb{C}^n$ *pseudokonvex von endlichem Typ. Gibt es Konstanten* $\epsilon > 0$, $C_k > 0$, *so daß zu jedem* $f \in C^k_{0q+1}(\overline{\mathcal{G}})$ *mit* $\overline{\partial} f = 0$ *ein* $u \in C^{k+\epsilon}_{oq}(\overline{\mathcal{G}})$ *existiert mit*

$$\overline{\partial} u = f, \; \| \, u \, \|_{C^{k+\epsilon}} \leq C_k \, \| \, f \, \|_{C^k} ?$$

Der Typ eines pseudokonvexen Gebietes mißt die mögliche Kontaktordnung holomorpher Kurven mit dem Gebietsrand – Typ 2 bedeutet „streng pseudokonvex". Das Problem ist im Falle von Sobolev-Normen statt der oben verwandten C^k-Hölder-Normen durch Kohn und Catlin u. a. (positiv) gelöst worden, ebenso im streng pseudokonvexen Fall (mit $\epsilon = 1/2$) durch Lieb und Range sowie W. Alt und Y. T. Siu – man vergleiche [24].

Zum Schluß möchte ich noch einige biographische Notizen anfügen, über

15. Die "Helden" der Geschichte

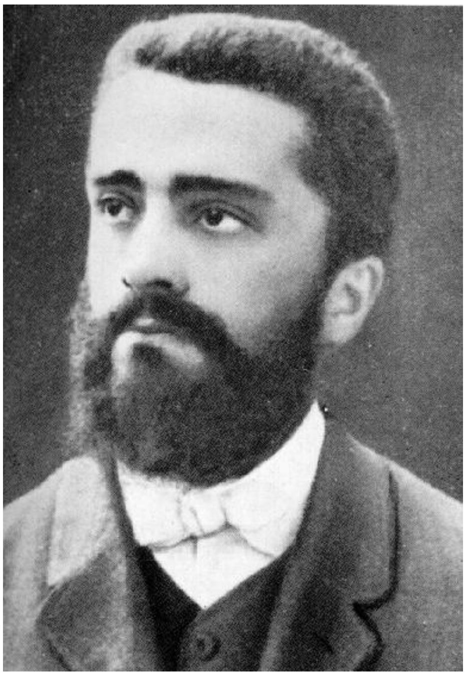
1. Fritz Hartogs 20.5.1874 - 18.8.1943

Friedrich Moritz Hartogs wurde in Brüssel geboren; er stammt aus einer deutsch-jüdichen Kaufmannsfamilie. Er studierte in Hannover, Berlin und München, dort vor allem bei A. Pringsheim, wurde 1906 Privatdozent in München, dann an derselben Universität außerordentlicher, schließlich persönlicher ordentlicher Professor. 1935 wurde er aufgrund der national-sozialistischen Beamtengesetze entlassen, 1939 schloß ihn die Deutsche Mathematikervereinigung aus. Ich zitiere den Brief ihres damaligen Vorsitzenden Wilhelm Süss [34]:

Sehr geehrter Herr Professor,
Sie können in Zukunft nicht mehr Mitglied der Deutschen Mathematikervereinigung sein. Deshalb lege ich Ihnen nahe, Ihren Austritt aus unserer Vereinigung zu erklären. Andernfalls werden wir das Erlöschen Ihrer Mitgliedschaft bei nächster Gelegenheit bekanntgeben.
Mit vorzüglicher Hochachtung
Der Vorsitzende

Hartogs war in der Folge den Verfolgungen und Demütigungen durch die nationalsozialistische deutsche Gesellschaft ausgesetzt; Kontakte zu Münchener Kollegen wurden ihm - trotz großen Einsatzes vieler Kollegen wie etwa C. Carathéodory - immer schwerer gemacht; er wurde gezwungen, sich von seiner Frau scheiden zu lassen; schließlich entzog er sich der unerträglichen Situation durch den Freitod. Seine Frau betreute ihn - auch als zwangsweise geschiedene - bis zu seinem Tode. Sie selbst starb 1957; die ihr zustehende Witwenpension wurde ihr von der Bundesrepublik erst spät bewilligt. Eine ausführlichere Darstellung findet sich in [2].

2. Eugenio Elia Levi 18.10.1883 - 28.10.1917



E. E. Levi ist der jüngere Bruder des Mathematikers Beppo Levi, der u.a. in der Integrationstheorie eine Rolle spielte. Er wurde in Turin geboren, studierte an der Scuola Normale Superiore di Pisa, wo er 1904 graduierte und danach als Assistent u.a. bei Dini arbeitete. Ab 1909 hatte er den Lehrstuhl für Analysis in Genua inne. 1915 meldete er sich zum Kriegsdienst [35] und fiel im Oktober 1917 in den schweren Kämpfen zwischen österreichischen und italienischen Truppen an der slowenischen Grenze bei Gorizia.

Levi hat bedeutende Beiträge zu allen Gebieten der Analysis (partielle Differentialgleichungen, Variationsrechnung, Differentialgeometrie, Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher) geliefert; er galt als der vielversprechendste Mathematiker seiner Generation in Italien.

3. Otto Blumenthal 20.7.1876 - 12.11.1944

Otto Blumenthals Biographie ist der Hartogs' im guten wie im bösen ähnlich. 1876 in Frankfurt als Sohn eines jüdischen Arztes geboren, studierte er zunächst versuchsweise Medizin, dann aber Mathematik in Göttingen, dort vor allem bei Arnold Sommerfeld und David Hilbert. Er war Hilberts erster Doktor (1899). Im Anschluß an einen Forschungsaufenthalt in Paris habilitierte er sich 1901 und ging auf Empfehlung von Hilbert und Sommerfeld 1905 an die TH Aachen. Dort entwickelte er die mathematische Ausbildung der Ingenieure weiter und führte die Lehramtsausbildung ein. Unsere Aachener Kollegen haben ihm am Hauptgebäude der Universität eine Gedenktafel gewidmet. Im Jahre 1933 wurde er aufgrund der nationalsozialistischen Gesetzgebung entlassen, emigrierte 1939 in die Niederlande, wo er von niederländischen Mathematikern (J. Schouten u.a.) unterstützt wurde. Den nationalsozialistischen Verfolgern fiel er nach Ausbruch des Krieges wieder in die Hände; das Ehepaar Blumenthal wurde 1943 in das KZ Westerbork verschleppt, wo Frau Blumenthal starb; O. Blumenthal wurde schließlich im KZ Theresienstadt eingesperrt und starb dort 1944 an den Entbehrungen. Eine ausführlichere Biographie findet sich in [14]; man vergleiche auch [32].

Blumenthals mathematische Interessen lagen im Bereich der analytischen Funktionen mehrerer Variabler (Modulfunktionen mehrerer Variablen), ferner, bedingt durch seine Aachener Aufgaben, in der angewandten Mathematik. In beiden Feldern leistete er wichtige Beiträge. Über lange Jahre war er geschäftsführender Herausgeber der Mathematischen Annalen; die Streichung seines Namens in der Herausgeberliste im Rahmen der nationalsozialistischen Verfolgungen war für ihn eine besondere Kränkung.

Seine Zeitgenossen schildern ihn als liebenswerten Menschen von ungeheuer breiter und tiefer Bildung - so beherrschte er acht Sprachen...

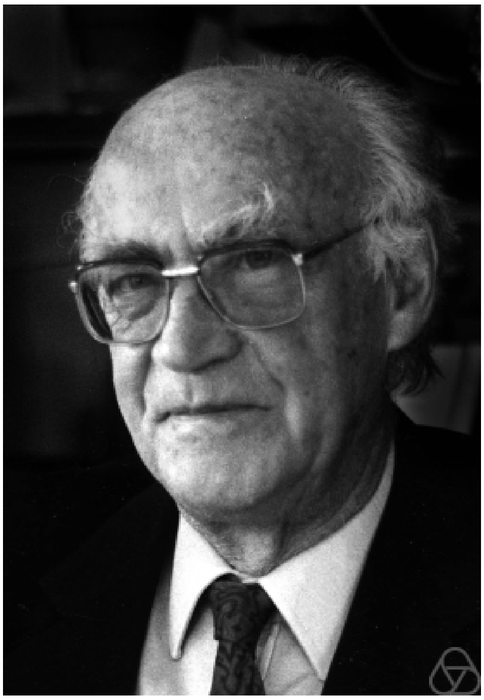
4. Heinrich Behnke 9.10.1898 - 10.10.1979

H. Behnke wurde in Hamburg geboren. Er studierte in Göttingen bei E. Landau und E. Hecke, promovierte und habilitierte in Hamburg, ging 1927 nach Münster, wo er die wohl einflußreichste mathematische Schule in Deutschland aufbaute, die Münsteraner Schule der komplexen Analysis und algebraischen Geometrie. Aus ihr sind Peter Thullen, Karl Stein, Wolfgang Rothstein, Friedrich Hirzebruch, Hans Grauert, Reinhold Remmert u.v.a. hervorgegangen: er hat 50 Doktorarbeiten im Laufe der Zeit betreut. Gemeinsam mit seinem Freund und Kollegen Henri Cartan trug er nach dem zweiten Weltkrieg wesentlich zur Wiederannäherung zwischen deutschen und französischen Mathematikern bei.

Behnke hatte ein nahezu magisches Gespür für hohe mathematische Begabung, die er schon bei ganz jungen Studenten zu entdecken vermochte und intensiv förderte. Darüber hinaus sah er vor allem die gute Ausbildung von Lehramtskandidaten als eine Hauptaufgabe jedes mathematischen Institutes, eine Aufgabe, der er sich mit großem Einsatz und Erfolg widmete. Eine Zeitlang war etwa jeder sechste Mathematiklehrer in Nordhein-Westfalen Behnke-Schüler oder -Schülerin.

Ich selbst habe Behnke in den 70-er Jahren in Münster als emeritierten Kollegen kennengelernt: eine liebenswürdige, sehr dominante Persönlichkeit; täglich kam er ins Institut, um dort an seinen Lebenserinnerungen zu schreiben. Diese "Semesterberichte" [4] zeichnen ein lebendiges Bild des Universitätslebens in Deutschland zwischen den Kriegen und des Wiederaufbaus der Universitäten nach dem zweiten Weltkrieg.

5. Peter Thullen 24.8.1907 - 24.6.1996



P. Thullen wurde in Trier geboren; er war der erste "Meisterschüler" Behnkes. Über seine wichtigen Beiträge zur komplexen Analysis habe ich schon berichtet. Die Machtergreifung der Nationalsozialisten bedeutete aber für ihn das Ende seiner Karriere im deutschen Universitätssystem: obwohl er keiner der direkt verfolgten Gruppen angehörte, konnte er sich als gläubiger Katholik mit der sich entwickelnden moralischen und politischen Verkommenheit der deutschen Gesellschaft nach 1933 nicht abfinden. Er nahm zunächst ein Forschungsstipendium in Rom wahr (1934), dann emigrierte er nach Ecuador.

In Quito nahm er eine Professur für Mathematik an und entwickelte sich zu einem der führenden Experten für die Mathematik sozialer Sicherungssysteme. Zahlreiche von vielen europäischen und lateinamerikanischen Regierungen angeforderte Gutachten tragen seine Unterschrift. Seine Arbeit führte ihn im Rahmen der UNO schließlich nach Genf, wo er Chefmathematiker des Internationalen Arbeitsamtes und Leiter der Abteilung für soziale Sicherheit wurde. Nach seiner Pensionierung nahm er (bis 1977) eine Professur für angewandte Mathematik und Statistik an der Universität Freiburg (Schweiz) wahr, ferner eine Honorarprofessur für komplexe Analysis an der Universität Zürich. Auch nach 1977 war er noch als Regierungsberater tätig, widmete sich aber wieder verstärkt der komplexen Analysis. Ich habe ihn noch auf einer Tagung in Oberwolfach kennengelernt.

Eine Beschreibung der politischen und akademischen Krisensituation bei der Machtergreifung 1933, die gerade wegen ihrer Unmittelbarkeit und Subjektivität berührt, findet sich in dem im Jahre 2000 veröffentlichten Erinnerungsbericht Thullens [36], für seine Kinder verfaßt.

6. Kiyoshi Oka 19.4.1901 - 1.3.1978

Über K. Oka habe ich im mathematischen Teil dieses Artikels schon berichtet; hier einige zusätzliche biographische Notizen.

Er wurde in Osaka geboren, studierte zunächst Physik, dann Mathematik in Kyoto (1919-1925). Die Jahre 1929-1932 sind die für ihn entscheidenden Jahre seines Frankreichaufenthalts. Ab 1932 war er an der Universität Hiroshima tätig; seine Arbeit wurde mehrfach durch Krankheit unterbrochen. 1949 wechselte er an die Nara-Universität für Frauen; dort blieb er bis zur Emeritierung. Für seine Forschungen wurde er durch hohe japanische Preise ausgezeichnet, als einer der großen Mathematiker des Jahrhunderts und einer der bedeutendsten Wissenschaftler Japans. - Neben den in seinen gesammelten Werken [27] zugänglichen Publikationen ist mittlerweile sein Nachlaß anscheinend durchgearbeitet worden und im Internet - für japanischsprachige Mathematiker - zugänglich.

aufg. 1964

Literatur

[1] A. Andreotti/R. Narasimhan. *Oka's Heftungslemma and the Levi problem for complex spaces.* Tr. Amer. Math. Soc. **111**, 345-360 (1964)

[2] F. L. Bauer. *Fritz Hartogs - Das Schicksal eines jüdischen Mathematikers in München.* aviso ZS Wiss. Kunst Bayern **1**, 34-41 (2004)

[3] H. Behnke. *Die Kanten singulärer Mannigfaltigkeiten.* Abh. math. Sem. Hamburg **4**, 347-365 (1926)

[4] H. Behnke. *Semesterberichte.* 302 p. Göttingen (1978)

[5] H. Behnke/K. Stein. *Konvergente Folgen von Regularitätsbereichen und die Meromorphiekonvexität.* Math. Ann. **116**, 204-216 (1939)

[6] H. Behnke/K. Stein. *Die Konvexität in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen.* Mitt. math. Ges. Hamburg **8**, 34-81 (1940)

[7] H. Behnke/P. Thullen. *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen.* 115 p. Göttingen (1934)

[8] O. Blumenthal. *Bemerkungen über die Singularitäten analytischer Funktionen mehrerer Veränderlicher.* Festschr. H. Weber, 11-22, Berlin (1912)

[9] H. J. Bremermann. *Über die Äquivalenz der pseudokonvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete im Raum von n komplexen Veränderlichen.* Math. Ann. **128**, 63-91 (1954)

[10] H. Cartan. *Sur les domaines d'existence des fonctions de plusieurs variables complexes.* Bull. Soc. Math. France **59**, 46-69 (1931)

[11] H. Cartan/P. Thullen. *Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer Veränderlichen.* Math. Ann. **106**, 617-647 (1932)

[12] M. Coltoiu/K. Diederich. *The Levi problem on Riemann domains over Stein spaces with singularities.* 6p. Preprint MPI Bonn (2005)

[13] F. Docquier/H. Grauert. *Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten.* Math. Ann. **140**, 94-123 (1960)

[14] V. Felsch. *Der Aachener Mathematikprofessor Otto Blumenthal.* www.math.rwth-aachen.de/ Blumenthal/Vortrag

[15] J.E. Fornaess/R. Narasimhan. *The Levi problem on complex spaces with singularities.* Math. Ann. **248**, 47-72 (1980)

[16] H. Grauert. *On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds.* Ann. math. **68**, 460-472 (1958)

[17] H. Grauert. *Bemerkenswerte pseudokonvexe Mannigfaltigkeiten.* Math. Z. **81**, 377-391 (1963)

[18] H. Grauert/R. Remmert. *Theorie der Steinschen Räume.* 249 p. Heidelberg etc. (1977)

[19] F. Hartogs. *Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher.* Münchener Bericht **36**, 223-242 (1906)

[20] H. Holmann/H. Huber. *In memoriam Peter Thullen.* (1996) unveröffentlicht

[21] J. Krzoska. *Über die natürlichen Grenzen analytischer Funktionen mehrerer Veränderlichen.* Dissertation Greifswald 1933

[22] P. Lelong. *Les fonctions plurisousharmoniques.* Ann. Ec. Norm. Sup. **62**, 301-388 (1945)

[23] E.E. Levi. *Sulle ipersuperficie delle spazi a 4 dimensioni che possone essere frontiera del campo de esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse.* Ann. Mat. Pura App. **18**, 69-79 (1911)

[24] I. Lieb/J. Michel. *The Cauchy Riemann complex.* Asp. Math. **E 34**, 362p. Braunschweig etc. (2002)

[25] R. Narasimhan. *The Levi problem for complex spaces.* I. Math. Ann. **142**, 355-365 (1961); II. Math. Ann. **146**, 195-216 (1962)

[26] F. Norguet. *Sur les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes (passage du local au global).* Bull. Soc. Mat. France **82**, 137-159 (1954)

[27] K. Oka. *Collected papers.* 223p. New York etc. (1984)

[28] K. Oka. *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. I. Domaines convexes par rapport aux fonctions rationelles.* J. Sci. Hiroshima U. **6**, 245-255 (1936)

[29] K. Oka. *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VI. Domaines pseudoconvexes.* Tohoku math. J. **49**, 15-52 (1942)

[30] K. Oka. *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VII. Sur quelques notions arithmétiques.* Bull. Soc. Math. France **78**, 1-27 (1950); "Iwanami"-Version (1948)

[31] K. Oka. *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IX. Domaines finis sans point critique intérieur.* Jap. J. Math. **27**, 97-155 (1953)

[32] M. Pinl. *Kollegen in einer dunklen Zeit.* Jber. DMV **71**, 167-228 (1969)

[33] R. M. Range. *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables.* 388 p. Berlin etc (1986), 2nd corr. ed (1998)

[34] V. Remmert. *Die deutsche Mathematiker-Vereinigung im Dritten Reich II.* DMV-Mitt. **12**, 223-245 (2004)

[35] C.Roero. *Eugenio Elia Levi.* www.torinoscienza.it/accademia/personaggi/apri?obj_id=431

[36] P. Thullen. *Erinnerungsbericht für meine Kinder.* Zs Exil Jg 2000, 44-58 (2000)

Die Fotos stammen aus der Sammlung des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach, aus dem Besitz der Universität Nara, der Familie Oka und des Fotohauses Watanabe, aus dem Besitz der RWTH Aachen, dem Besitz des Mathematik-Departments der Universität Turin und dem Privatbesitz von Prof. Dr. B. Kaup. Ich danke G. M. Greuel, M. Fleckenstein, T. Morimoto, M. Taniguchi, den übrigen Verantwortlichen der Nara-Universität, dem Watanabe Fotohaus, der Familie Oka sowie den Turiner Kollegen für die Veröffentlichungserlaubnis. Für wertvollen Rat gilt mein Dank neben den Obengenannten auch V. Felsch, H. Holmann, R. M. Range und R. Remmert. Für die Erstellung des Manuskripts danke ich Frau H. Lütz, für die Durchführung der Korrekturen und technischen Verbesserungen gilt mein besonderer Dank Dr. J. Ruppenthal.

Mathematisches Institut der Universität
Beringstr. 4
D 53115 Bonn
ilieb@math.uni-bonn.de

Ein neuer Konvexitätsbegriff in der komplexen Analysis
von Joachim Michel,
Université du Littoral Côte D'Opale, Frankreich
Bonn, den 10.02.2006

Einleitung.

In diesem Vortrag soll kurz ein aktuelles Forschungsgebiet der Komplexen Analysis umrissen werden. Da es sich hierbei um eine Materie handelt, deren Beschreibung technisch kompliziert ist, und auf Grund der sehr heterogenen Zuhörerschaft müssen wir uns mit einigen allgemeinen Andeutungen begnügen. Sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Holomorphiegebiet mit glattem Rand. In Untersuchungen zu den so genannten Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen möchte man die Beziehung zwischen der komplexen Geometrie des Randes von D und der Lösungstheorie von

$$\begin{aligned} \text{(CR)} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i} &= g_i, i = 1, 2, ..., n, \\ &\text{wobei} \\ \frac{\partial g_j}{\partial \overline{z}_i} &= \frac{\partial g_i}{\partial \overline{z}_j}, i, j = 1, 2, ..., n \end{aligned}$$

verstehen.

Man nennt $g = \sum_{i=1}^n g_i(z) d\overline{z}_i$ eine $(0,1)-$Form auf D. Obiges System kann auch auf Differentialformen von beliebigem Grad verallgemeinert werden. Wir wollen hier nur (0,1)-Formen behandeln. Das obige DGL-System schreibt man kompakter

$$\overline{\partial} f = g, \text{wobei } \overline{\partial} g = 0.$$

Dabei versteht man unter komplexer Geometrie gewisse Strukturen, die von der komplexen Struktur des $\mathbb{C}^n$ auf D induziert werden und die invariant unter biholomorphen Transformationen sind. Mit vernünftigen Annahmen an g ist (CR) immer auf Holomorphiegebieten lösbar. Jedoch ist im Allgemeinen überhaupt nicht klar, wie die Randregularität von f durch g bestimmt wird.

Beispiel. Sei D die Kugel. Wenn $g_i \in \mathcal{C}^0(D) \cap L^\infty(D)$, dann gibt es ein $f \in \Lambda^{1/2}(\overline{D})$ mit (CR). Die Randregularität von f ist optimal in diesem Kontext, das heißt, im Allgemeinen kann nicht $f \in \Lambda^{1/2+\varepsilon}(\overline{D})$, mit $\varepsilon > 0$, erreicht werden.

Obiges Ergebnis kann auf streng pseudokonvexe Gebiete verallgemeinert werden, siehe Grauert, H./Lieb, I. [7] oder Henkin, G. [8]. Diese sind Gebiete mit glattem Rand, wobei der Rand lokal biholomorph äquivalent zu einem streng konvexen Rand ist. Ausgangspunkt für Verallgemeinerung des Begriffes der strengen Pseudokonvexität war die Beobachtung, dass die Berührungsordnung streng pseudokonvexer Ränder mit holomorphen Kurven maximal 2 ist. Definiert man den Typ eines Randpunktes p durch die maximale Berührungsordnung des Randes mit holomorphen Kurven in p, so sind alle Randpunkte streng pseudokonvexer Gebiete vom Typ 2. Der Typ eines Gebietes ist das Supremum über die Typen aller seiner Randpunkte.

Nun kann man jedes Holomorphiegebiet durch glatt berandete streng pseudokonvexe Gebiete ausschöpfen. In Analogie zur Definition streng pseudokonvexer Gebiete könnte man glauben, dass glatte Holomorphiegebiete lokal biholomorph zu (schwach) konvexen Gebieten sind. Ein Gegenbeispiel von Kohn-Nirenberg [9] zeigt, dass dies falsch ist. Außerdem erreicht man durch Ausschöpfung keine Randwerttheorie der glatt berandeten Holomorphiegebiete.

Konvexe Gebiete und die Theorie von McNeal.

Um zu Verallgemeinerungen zu gelangen, liegt es daher nahe, zunächst einmal die Auswirkung der Konvexität des Gebietes auf die biholomorphen Invarianten im Rand zu untersuchen. J. McNeal [10]und H. Boas/E. Straube [1] haben unabhängig voneinander gezeigt, dass in konvexen Randpunkten der Typ gleich der maximalen Berührungsordnung mit komplexen Geraden ist. Diese Beobachtung vereinfacht die Untersuchungen und stellt außerdem eine Beziehung zur affinen Geometrie her. Insbesondere folgt daraus, dass man zur Definition des Typs mit regulären holomorphen Kurven auskommt. Dies gilt im allgemeinen Fall nicht.

Die Theorie von McNeal aus [11]ergibt aber noch viel mehr. Sei das konvexe Gebiet D durch die definierende konvexe Randfunktion $r(z)$ beschrieben, das heißt es gelte $D = \{z \in \mathbb{C}^n | \ r(z) < 0\}$, wobei $r \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$ nicht verschwindenden Gradienten auf dem Rand von D hat. r wird auch definierende Randfunktion des Gebietes genannt. Dann setzt man für genügend kleines $\varepsilon > 0$ $D_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n | \ r(z) < \varepsilon\}$. Ist D von endlichem Typ, so ist für kleine ε D_ε ebenfalls von endlichem Typ. Sei $p \in D$ ein Punkt in der Nähe des Randes und $r(p) = \varepsilon_0$. Dann kann man p für jedes genügend kleine $\varepsilon > 0$ ein sogenanntes McNealsches Polyeder zuordnen. Das McNealsche Polyeder ist das kartesische Produkt von n komplexen Kreisscheiben. Man konstruiert es, vereinfacht ausgedrückt, folgendermaßen. Sei q_ε auf bD_ε der Randpunkt mit minimaler Entfernung zu p. Die erste Kreischeibe hat Mittelpunkt p, Radius $|p - q_\varepsilon|$, und liegt in der durch die Strecke $\overline{pq_\varepsilon}$ bestimmten komplexen Geraden, der sogenannten komplexen Normalen an D_ε durch q_ε. Man bezeichnet den Radius $|p - q_\varepsilon|$ mit $\tau_1(p, \varepsilon)$ und es gilt $\tau_1(p, \varepsilon) \approx |\varepsilon - \varepsilon_0|$. Dann betrachtet man den $(n-1)$-dimensionalen komplexen affinen Raum $V_{n-1}(p,\varepsilon)$ durch p, der senkrecht auf der komplexen Normalen steht. Darin bestimmt man nun eine komplexe Gerade mit einer gewissen Extremaleigenschaft. Man ordnet jeder komplexen Geraden $l \subset V_{n-1}(p,\varepsilon)$, die durch p geht, die Kreisscheibe $D(p) \subset l$ mit Mittelpunkt p zu, so dass $D(p) \subset D_\varepsilon$, $\overline{D(p)} \cap bD_\varepsilon \neq \emptyset$ gilt. Sei nun ein $l = l_2$ in $V_{n-1}(p,\varepsilon)$ so gewählt, dass die dazugehörige Kreisscheibe minimalen Radius hat. Damit hat man die zweite Kreisscheibe bestimmt, und ihren Radius bezeichnet man mit $\tau_2(p,\varepsilon)$. Nun betrachtet man den $(n-2)$-dimensionalen komplexen affinen Raum $V_{n-2}(p,\varepsilon)$ durch p, der senkrecht auf der komplexen Normalen und l_2 steht. Darin bestimmt man wie oben eine komplexe Gerade durch p und eine darin liegende Kreisscheibe die minimalen Radius hat. Deren Radius bezeichnet man mit $\tau_3(p,\varepsilon)$. Dies setzt man fort, bis man n Kreisscheiben und die dazu gehörigen Radien $\tau_i(p,\varepsilon)$, $i = 1,2,...,n$ hat. Das McNealsche Polyeder $P_\varepsilon(p)$ ist also das Produkt dieser Kreisscheiben mit dem Polyradius $(\tau_1(p,\varepsilon), \tau_2(p,\varepsilon), ..., \tau_n(p,\varepsilon))$. Es gilt

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \lessapprox \tau_i(p,\varepsilon) \lessapprox \varepsilon^{\frac{1}{m}},\ i = 2,..,n,$$

wobei m der Typ von q_ε im Rand von D_ε ist. Man kann sich vorstellen, dass diese Konstruktion erstens nicht eindeutig ist und zweitens in sehr unübersichtlicher Weise von p und ε abhängt. Für eine vollständige Beschreibung scheint der konvexe Fall gerade noch zugänglich zu sein. In diesem Vortrag soll angedeutet werden, wie man dies noch verallgemeinern kann.

McNeal hat viele tiefliegende Eigenschaften von $P_\varepsilon(p)$ gezeigt. Ein Beispiel ist die folgende: Sei $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ ein Einheitsvektor. Nun kann man

$$\tau(p,v,\varepsilon) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{|v_i|}{\tau_i(p,\varepsilon)} \right)^{-1}$$

als ein Maß für den Radius dieser der komplexen Geraden $l = p + \mathbb{C}v$ zugeordneten Kreisscheibe ansehen. Dann gilt für alle $q \in P_\varepsilon(p)$ und genügend kleine ε

$$\tau(p,v,\varepsilon) \approx \tau(q,v,\varepsilon).$$

Dies bedeutet, dass man für festes $P_\varepsilon(p)$ eine gewisse Kontrolle der $P_\varepsilon(q)$, $q \in P_\varepsilon(p)$, hat. Insbesondere kann man in lokalen quantitativen Abschätzungen die $\tau_i(q,\varepsilon)$ durch die $\tau_1(p,\varepsilon), \tau_2(p,\varepsilon), ..., \tau_n(p,\varepsilon)$ ausdrücken.

In der McNealschen Theorie unterscheidet man 2 Familien von Vergleichssätzen für die Polyeder:

A) Für $P_\varepsilon(p)$, wobei p fest ist und ε vaiiert;
B) für $P_\varepsilon(q)$, mit $q \approx p$ und festem ε.

Die Beziehung zwischen (A) und (B) wird durch die Konvexität und den Typ des Gebietes bestimmt.

Holomorphe Stützfunktionen.

Wir erinnern daran, dass wir (CR) mit Hölderabschätzungen auf dem Rand lösen wollen. Hierzu kann man in Analogie zum streng pseudokonvexen Fall Lösungssoperatoren in Integralform suchen

$$f(z) = \int_{bD} g(\zeta) \wedge K(\zeta, z) - \int_D g(\zeta) \wedge B(\zeta, z).$$

Das letzte Integral ist universell und explizit und, was Abschätzungen betrifft, unproblematisch. Die komplex-geometrischen Probleme spiegeln sich in den Eigenschaften des Integralkernes $K(\zeta, z)$ wieder. Der wesentliche Bestandteil von $K(\zeta, z)$ ist die sogenannte holomorphe Stützfunktion des Randes von D. Eine holomorphe Stützfunktion $S(\zeta, z)$ für D ist charakterisiert durch folgende Eigenschaften. $S(\zeta, z)$ ist $\mathcal{C}^\infty$ bezüglich (ζ, z) und holomorph in z, wobei ζ und z in einer Umgebung des Randes variieren mit $|\zeta - z| < R$. R ist eine vom Rand abhängige positive Konstante. Die wichtigste Eigenschaft von $S(\zeta, z)$ ist, dass für jedes $\zeta \in bD$ die reelle reguläre Hyperfläche $\{z \in \mathbb{C}^n |\ \mathrm{Re}\, S(\zeta, z) = 0, |\zeta - z| < R\}$, auch Stützfläche genannt, außerhalb von D liegt und den Rand in ζ berührt. Holomorphe Stützfunktionen existieren nicht immer für allgemeine Holomorphiegebiete mit glattem Rand. Jedoch besitzen streng pseudokonvexe Gebiete und konvexe Gebiete immer holomorphe Stützfunktionen. Für konvexe Gebiete ergibt sich eine solche direkt aus der definierenden konvexen Randfunktion r, man kann nämlich setzen

$$S(\zeta, z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial \zeta_i}(\zeta)(\zeta_i - z_i).$$

Wie man sieht, ist die Stützfläche nichts anderes als der Tangentialraum in ζ. Natürlich gibt es selbst für konvexe Gebiete noch andere holomorphe Stützfunktionen. Es stellt sich heraus, dass die obige Stützfunktion für Abschätzungen von (CR) nicht optimal ist. Dies liegt am Verhalten der in der Stützfläche liegenden komplexe Kurven, die durch durch ζ gehen. Für Abschätzungen des Lösungsterms $\int_{bD} g(\zeta) \wedge K(\zeta, z)$ ist eine solche Stützfläche wertlos, wenn diese Kurven sich nicht mit wachsender Entfernung zu ζ optimal schnell vom Rand wegkrümmen. Das heißt, man braucht eine gewisse untere Abschätzung für die Randannäherung der Stützfläche.

$S(\zeta, z)$ steht im Nenner von $K(\zeta, z)$ und Bestandteile von $S(\zeta, z)$ stehen im Zähler. Ist die Kontaktordnung der Stützfläche mit dem Rand minimal, das heißt gleich 2, dann genügt es, eine optimale Abschätzung von $\operatorname{Re} S(\zeta, z)$ nach unten zu haben. Die Zählerterme von $K(\zeta, z)$ spielen dann keine Rolle. Dies ist der Fall bei konvexen Gebieten, deren definierende Randfunktion positiv definite Hesseform haben, oder allgemeiner für streng pseudokonvexe Gebiete. Bei konvexen Gebieten endlichen Typs $m > 2$ genügt dies jedoch nicht mehr. Hier muß man eine holomorphe Stützfunktion finden, so dass sich in den Abschätzungen von $K(\zeta, z)$ die Zähler- und Nennerterme in $S(\zeta, z)$ auf eine subtile Weise gegeneinander kürzen lassen. Die natürliche Randfunktion leistet dies im allgemeinen nicht. Wie bereits angedeutet wurde, ist der Hauptgrund dafür, dass die komplexen Geraden im Tangentialraum in ζ nicht die optimale Berührungsordnung mit dem Rand haben. Die genaue Beschreibung der hinreichenden Bedingung für gute Abschätzungen kann hier nicht gegeben werden. Stark vereinfacht gesagt, man braucht folgendes: Für jeden Randpunkt ζ gelte

$$(*) \quad S(\zeta, z) = 0 \Rightarrow dist(z, bD) \gtrsim |\zeta - z|^m,$$

wobei m der Typ des Gebiets ist.

Die Konstruktion von Diederich und Fornæss.

K. Diederich und J. E. Fornæss (1999) [6] haben nun für konvexe Gebiete endlichen Typs eine optimale holomorphe Stützfunktion konstruiert. Daraus resultierten optimale Abschätzungen der Lösungen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, die von K. Diederich, B. Fischer und J. E. Fornæss [4] gegeben wurden.

Bei der Konstruktion der Stützfunktion gingen K. Diederich und J. E. Fornæss in mehreren Etappen vor.

1) Zuerst betrachteten sie für festes $\zeta \in bD$ den Rand als Graph über dem Tangentialraum in ζ.

2) Sei $v \in T_\zeta^{\mathbb{C}}(bD) \backslash \{0\}$ ein fest gewählter holomorpher Tangentialvektor. Nun betrachteten sie nur den Teilgraphen, der über den Unterraum $\zeta + span_{\mathbb{R}}(\nu(\zeta), v, iv) \approx \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ liegt, wobei $\nu(\zeta)$ den Normalenvektor in ζ bezeichnet.

3) Der dadurch heraus geschnitteneTeil des Randes wird durch ein konvexes Poly-

nom beschrieben, das nur von einer komplexen Variable z abhängt:

$$p_v(z) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} z^i \overline{z}^j \geq 0$$

Da die $p_v(z)$ einen Teil des Randes beschreiben, findet man sie auch in der geometrischen Stützfunktion wieder. Der Ausgangspunkt der Konstruktion ist deshalb immer die natürliche Stützfunktion. Da ζ vom Typ $\leq m$, ist können in den Abschätzungen Fehlerterme höherer Ordnung von $p_v(z)$ absorbiert werden. A priori kann $p_v(z)$ auf gewissen reellen Geraden verschwinden. Dies würde eine zu große Singularität im Integralkern $K(\zeta, z)$ bewirken. Um dies zu vermeiden, addiert man gewisse sorgfältig gewählte Terme der Form $\mathrm{Re}(b_i z^i), .\ b_i = b_i(\zeta, \nu) \in \mathbb{C}$. Damit erhält man untere Abschätzungen der Art $(*)$. Die Form der Korrekturterme ist erzwungen, da man die Holomorphie der Stützfunktion bezüglich z erhalten muß. Wir können hier nicht auf Einzelheiten eingehen.
$p_v(z)$ ist Summe von homogenen Termen

$$p_{v,s}(z) = \sum_{i+j=s} a_{ij} z^i \overline{z}^j.$$

Unter den $p_{v,s}(z)$ gibt es nach der Diederich/Fornæssschen Theorie "gute" und "schlechte" Terme. Zum Beispiel ist $p_{v,r}(z)$ mit $r = \min\{s | p_{v,s}(z) \neq 0\}$ konvex und damit "gut".

$$p_v(z) = 0 + 0 + \cdots + p_{v,r}(z) + p_{v,r+1}(z) + \cdots + p_{v,m}(z).$$

Hier hängt r jedoch von v und ζ ab und ist im Allgemeinen unstetig, denn für ein benachbartes $\widetilde{v}$ können Terme auftreten mit $\widetilde{r} < r$:

$$p_{\widetilde{v}}(z) = 0 + 0 + \cdots + p_{\widetilde{v},\widetilde{r}}(z) + + \cdots + p_{v,r}(z) + p_{v,r+1}(z) + \cdots + p_{v,m}(z).$$

Um diese Unstetigkeit in den Griff zu bekommen, muß man "Güte" quantifizieren, um somit die Abhängigkeit von v und ζ zu kontrollieren. Diederich und Fornæss bewirkten dies, indem sie Konvexität durch eine Differentialungleichung beschreiben. Dadurch konnten sie Abweichungen von Konvexität "messen".

Um nun eine Stützfunktion mit (*) zu bekommen, muss man geschickt Terme zu $p_v(z)$ addieren die die "guten" Teme unterstützen und die "schlechten" schwächen.

$$p_v + \mathrm{Re}\,\Phi_v = \mathrm{Re}\, b_2 z^2 + \mathrm{Re}\, b_3 z^3 + \cdots + \mathrm{Re}\, b_{r-1} z^{r-1} + p_{v,r} + \mathrm{Re}\, b_r z^r + \cdots.$$

Globalisiert man die Konstruktion auf alle ζ und alle v, erhält man eine bessere Stützfunktion. Diese neue Stützfunktion erlaubt es dann, Lösungsformeln für f zu konstruieren mit

$$|f|_{\Lambda^{1/m}(\overline{D})} \lesssim |g|_{\infty,D}.$$

Später haben dann dieselben Autoren die Ergebnisse auf sogenannte lineal konvexe Gebiete verallgemeinert [3,5]. Für konvexe Gebiete endlichen Typs wurden optimale Abschätzungen auch von A. Cumenge [2] gegeben. Sie verfolgte jedoch einen ganz anderen Ansatz.

$K-$konvexe Gebiete.

Nun möchte ich beschreiben, wie man obige Ideen auf eine andere Klasse von Gebieten verallgemeinern kann. Wir erinnern daran, dass für konvexe Gebiete die Existenz von Stützfunktionen aus geometrischen Gründen garantiert ist, diese jedoch nicht zu guten Abschätzungen taugten. Trotzdem dienten sie in der Arbeit von Diederich/Fornæss als Ausgangspunkt zur Konstruktion einer besseren Stützfunktion.

Ich möchte von zwei Überlegungen ausgehen.

1) Sei $U \subset \mathbb{C}^{n-1}$ eine offene Nullumgebung und $R \in \mathcal{C}^\infty(U)$ eine reellwertige Funktion, so dass es eine positive Konstante K und eine konvexe Funktion h auf U gibt mit

$$0 \leq h \leq R \leq K \cdot h.$$

Wir nennen dann R $K-$konvex. R verschwinde in 0 von endlicher Ordnung. Man kann die naive Frage stellen, ob R in einer Nullumgebung konvex ist. Die Antwort ist ja, wenn R nur von einer reellen Variablen abhinge. Für $n = 2$ hat mir V. Thilliez von der Université de Lille 1 ein einfaches Gegenbeispiel genannt. Man setze für festes $0 \leq t < 1$ und $z \in \mathbb{C}$

$$R_t(z) = |z|^4 + t|z|^2 \operatorname{Re} z^2.$$

Dann gilt mit der konvexen Funktion $h_t(z) = (1-t)|z|^4$

$$h_t(z) \leq R_t(z) \leq \frac{1+t}{1-t} h_t(z).$$

$R_t(z)$ ist somit eine $\frac{1+t}{1-t}$-konvexe Funktion. Man kann durch Ausrechnen der Hesseform leicht nachrechnen, dass $R_t(z)$ für $t > \sqrt{8}/3$ nicht konvex ist. Setzt man

$$D_t = \{(z,w) | \operatorname{Re} w > R_t(z)\},$$

so ist D_t für alle $0 \leq t < 1$ ein (nicht beschränktes) Holomorphiegebiet. Randpunkte sind vom Typ 4, wenn $z = 0$ gilt, sonst vom Typ 2.
2) Sei D ein streng pseudokonvexes Gebiet in $\mathbb{C}^n$ und ζ ein Randpunkt. Nach einer unitären Transformation und einer Translation kann man Randstücke lokal durch die Nullstellen folgender Funktion darstellen, wobei ζ in 0 übergeht,

$$r(z) = -\operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} P_2(z) + Lev(z) + O_3(z).$$

Hier ist $P_2(z)$ ein holomorphes homogenes quadratisches Polynom und $Lev(z)$ ist eine positiv definite hermitische Form, die so genannte Levi-Form. Man nennt das quadratische holomorphe Polynom $\Phi(z) = -z_1 + P_2(z)$ auch das Levi-Polynom des Randes bezüglich 0. Da auf dem Rand $r(z) = 0$ gilt, kann man lokal den Rand als Graph bezüglich der Variablen $\operatorname{Im} z_1, z_2, z_3, ..., z_n$ ausdrücken. Die biholomorphe Transformation

$$w_1 = -\Phi(z), w_2 = z_2, ..., w_n = z_n$$

transformiert dann den Rand in ein streng konvexes Randstück mit definierender Randfunktion

$$\widetilde{r}(w) = -\operatorname{Re} w_1 + Lev(w) + O_3(w).$$

Durch Verkleinern der Nullumgebung kann man annehmen, dass die Levi-Form den Term $O_3(w)$ absorbiert. Die natürliche Stützfläche an den Rand in 0 ist dann der Tangentialraum.

Durch Kombination beider Überlegung kommt man nun zur folgenden allgemeineren Gebietsklasse.
Sei $D \subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes Holomorphiegebiet mit glattem Rand vom endlichen Typ. Es gebe eine holomorphe Stützfunktio $S(\zeta, z)$, so dass $S(\zeta, \cdot)$ für jeden Randpunkt ζ lokale holomorphe Stützfunktion ist. Sei nun ζ festgehalten. Wähle eine unitäre Transformation, so dass der Rand lokal ein Graph wie oben ist und ζ in 0 übergeht. Dabei transformiert sich $S(\zeta, z)$ entsprechend. Dann wende folgende lokale biholomorphe Transformation an:

$$w_1 = S(\zeta, z), w_2 = z_2, ..., w_n = z_n.$$

Weiter kann man erreichen, dass der holomorphe Tangentialraum in 0 durch $w_1 = 0$ beschrieben wird. Wir verlangen nun, dass der transformierte Rand lokal der Graph einer gewissen K-konvexen Funktion $R_\zeta(\operatorname{Im} w_1, w_2, w_3, ..., w_n)$ ist. Das heißt, es gibt eine konvexe Funktion $h_\zeta(0, w_2, w_3, ..., w_n)$ so dass gilt

$$0 \leq h_\zeta(0, w_2, w_3, ..., w_n) \leq R_\zeta(0, w_2, w_3, ..., w_n) \leq K \cdot h_\zeta(0, w_2, w_3, ..., w_n).$$

Die Konstante $K \geq 1$ soll gleichmäßig für alle ζ wählbar sein, und die für ζ zu wählenden Umgebungen sollen alle Kugeln mit einem gewissen Minimalradius enthalten. Dann nennen wir D ein $K-$konvexes Gebiet. Man beachte, dass obige Funktionen h_ζ keine weiteren Regularitätseigenschaften haben und sie auch nicht stetig von ζ abhängen müssen.
Ist $K = 1$ so ist D lokal konvexifizierbar. Unter anderem sind streng pseudokonvexe Gebiete $1-$konvex.
Fassen wir zusammen.
a) bD wird über den holomorphen Tangentialraum in ζ durch eine $K-$konvexe Funktion beschrieben;
b) $\{z | \operatorname{Re} S(\zeta, z) = 0\} \cap D \cap U(\zeta) = \emptyset$, wobei $U(\zeta)$ eine Umgebung von ζ ist.

Das Ziel ist es nun ausgehend von $S(\zeta, z)$, eine gute Stützfunktion à la Diederich und Fornæss zu konstruieren. Die Hauptschwierigkeit dabei ist, dass eine quantitative Charakterisierung der $K-$Konvexität durch Differentialungleichungen nicht bekannt ist. Deshalb stellt sich die Frage, wie man "gute" von "schlechten" Termen unterscheiden soll. Eine andere Schwierigkeit ist, dass die $K-$Konvexität den Rand nur über dem holomorphen Tangentialraum einschränkt.
Hier nur einige kurze Andeutungen. Die Hauptschwierigkeit löst man, indem man folgende Terme betrachtet

$$P = H + \tau,$$

wobei H $K-$konvex ist und τ fast konvex im folgendem Sinne ist: τ erfüllt für alle $\lambda \in [0, 1]$

$$\forall X, Y \in U(\zeta): \quad \tau((1-\lambda)X + \lambda Y) \leq (1-\lambda)\tau(X) + \lambda\tau(Y) + d,$$

mit mit einem gewissen sehr kleinen Fehlerterm d. Damit vermeidet man Differentialungleichungen, die es nicht gibt, und führt alles auf schwach gestörte konvexe Funktionen zurück. Man nennt dann P fast $K-$konvex. Damit gelingt es dann, den Beweis von Diederich/Fornæss auf $K-$konvexe Gebiete zu verallgemeinern. Die so gewonnenen Stützfunktionen genügen allen in [6] bewiesenen Eigenschaften. Allerdings braucht man für Hölderabschätzungen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen mehr. Insbesondere braucht man die McNealschen Vergleichssätze für die nach ihm benannten Polyeder. Ist $\zeta \in bD$ fest gewählt, so kann man die erste Klasse der McNealschen Vergleichssätze auf $K-$konvexe Gebiete verallgemeinern. Dies liegt daran, dass hier die lokal biholomorphe Transformation mittels der Ausgangsstützfunktion $S(\zeta, z)$ fest ist. Will man jedoch die McNealschen Polyeder für verschieden Randpunkte in Beziehung setzen, so hat man es mit verschiedenen biholomorphen Transformationen zu tun. Da die Ausgangsstützfunktion jedoch relativ beliebig ist, treten ernste Schwierigkeiten auf. Diese sind bis jetzt nur teilweise überwunden, und ich bemühe mich in einem gemeinsamen Projekt mit W. Alexandre, Université de Rouen, sie zu überwinden.

Literatur:

[1] H. Boas,E. Straube: On equality of type and variety type ef real hypersurfaces in $\mathbb{C}^n$. J. Geom. Analysis 2 (1992), S. 95-98

[2] A. Cumenge: Sharp estimates for $\overline{\partial}$ in convex domains of finite type. Ark. Math. 39 (1) (2001), S. 1-25

[3] K. Diederich, B. Fischer: Hölder estimates on lineally convex domains of finite type. Mich. Math. J. 54 (2) (2006), S. 341-352

[4] K. Diederich,B. Fischer,J. E. Fornæss: Hölder estimates on convex domains of finite type.

[5] K. Diederich, B. Fischer, J. E. Fornæss: Lineally convex domains of finite type: holomorphic support functions. Man. Math. 112 (4) (2003), S. 403-431

[6] K. Diederich,J. E. Fornæss: Support functions for convex domains of finite type. Math. Z. 230 (1999), S. 145-164

[7] H. Grauert/I. Lieb: Das Ramirezsche Integral und die Lösung der Gleichung $\overline{\partial} f = \alpha$ im Bereich der beschränkten Formen. Rice University Studies 56 (1970), S. 29-50

[8] G. M. Henkin: Integral representations of functions holomorphic in strictly pseudoconvex domains and applications to the $\overline{\partial}$ problem. Math. U.S.S.R. Sb. 11 (1970), S. 273-281

[9] J. J. Kohn/L. Nirenberg: A domain not admitting holomorphic support functions. Math. Ann. 201 (1973), S. 265-268

[10] J. McNeal: Convex domains of finite type. J. Functional Anal. 108 (1992), S. 361-373

[11] J. McNeal: Estimates of the Bergman kernel of convex domains. Adv. Math. 109 (1994), S. 108-139

[12] J. Michel: Construction of a holomorphic support function à la Diedrich/Fornæss for $K-$convex domains (preprint)

Noyaux adaptés aux variétés CR et estimations pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel

Christine LAURENT-THIÉBAUT

Dans cet article on s'intéresse à l'existence et à la construction de solutions fondamentales pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel dans les sous-variétés CR génériques de $\mathbb{C}^n$ ainsi qu'à la résolubilité locale de l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle avec estimations $\mathcal{C}^k$ et L^p.

Soit M une sous-variété CR générique, de codimension réelle k de $\mathbb{C}^n$ et z_0 un point de M. On dira qu'un noyau K_M est une solution fondamentale pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel en degré r, $1 \leq r_0 \leq r \leq r_1 \leq n-k$, dans un voisinage U_{z_0} de z_0 dans M si K_M est une forme différentielle de degré $2n-k-1$ continue sur $U_{z_0} \times U_{z_0} \setminus \Delta(U_{z_0})$, où $\Delta(U_{z_0}) = \{(z,\zeta) \in U_{z_0} \times U_{z_0} \mid z = \zeta\}$ désigne la diagonale de $U_{z_0} \times U_{z_0}$, qui vérifie au sens des courants

$$\overline{\partial}_{b,z}[K_M]_{p,r-1} + \overline{\partial}_{b,\zeta}[K_M]_{p,r} = [\Delta(U_{z_0})],$$

$[K_M]_{p,r}$ étant la composante de bidegré (p,r) en z de K_M, $0 \leq p \leq n$ et $1 \leq r_0 \leq r \leq r_1 \leq n-k$ et $[\Delta(U_{z_0})]$ le courant d'intégration sur la diagonale de $U_{z_0} \times U_{z_0}$.

L'existence d'une solution fondamentale en degré r au voisinage d'un point de M implique la validité du Lemme de Poincaré pour le $\overline{\partial}_b$ en degré r au voisinage de ce point. Si M est une hypersurface, on sait par les travaux de Kohn, qu'une condition suffisante pour la validité du Lemme de Poincaré pour le $\overline{\partial}_b$ en degré r au voisinage d'un point est que M satisfasse la condition $Y(r)$ en ce point. Dans le cas où M est une sous-variété CR générique de codimension réelle k, $k \geq 1$, Henkin [11] a prouvé que, si M est $\min(n-k-r+1, r+1)$-concave en un point de M, le Lemme de Poincaré pour le $\overline{\partial}_b$ est valide en degré r. On se limitera donc dans cet article au cas de variétés CR génériques q-concaves ou d'hypersurfaces vérifiant la condition $Y(q)$.

Les premières solutions fondamentales pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel ont été définies vers 1975, dans le cas où M est le bord d'un domaine strictement strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$, dans des travaux de Romanov [17], Henkin [10] et Skoda [22]. Des estimations L^p et hölderiennes y sont également prouvées. Les noyaux construits indépendamment par Henkin et Skoda ont été repris par Boggess dans son livre [5] en utilisant le formalisme de Harvey et Polking ; il prouve des estimations $\mathcal{C}^l$ pour les opérateurs intégraux associés à ces noyaux. Ensuite Harvey et Polking ont considéré dans [9] le cas des hypersurfaces faiblement pseudoconvexes possédant une fonction support birégulière.

Classification math. : 32V20, 32F10.
Mots-clés : variétés CR, équation de Cauchy-Riemann tangentielle, représentation intégrale, q-convexité.

Lorsque M est une hypersurface vérifiant la condition $Y(q)$ de Kohn, les premières solutions fondamentales ont été données par Boggess et Shaw [6] en 1985. En 1992, Fischer et Leiterer [8] ont prouvé une formule de Bochner-Martinelli-Koppelman (ce qui est équivalent à l'existence d'une solution fondamentale) pour les hypersurfaces de classe $\mathcal{C}^2$ dont la forme de Levi possède q paires de valeurs propres de signes opposés, ainsi que des estimations uniformes. Dans [3], Barkatou a amélioré leurs résultats en prouvant des estimations $\mathcal{C}^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, pour les mêmes noyaux. Finalement Fischer [7] a construit de nouveaux noyaux permettant d'obtenir les estimations optimales $\mathcal{C}^{l+\frac{1}{2}}$ dans ce cadre. Notons également le travail [20] de Shaw qui étend les résultats de Henkin aux hypersurfaces satisfaisant la condition $Y(q)$ et construit une solution fondamentale pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel sur M.

Les premiers résultats sur la résolution de l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle dans les variétés CR q-concaves sont annoncés par Henkin dans [11], puis développés dans [1]. Dans sa thèse [2], Barkatou a étendu les résultats de son article [3] au cas des variétés CR q-concaves, obtenant ainsi une solution fondamentale avec des estimations $\mathcal{C}^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ sur M. Cette solution fondamentale est construite par itération de la résolution du $\overline{\partial}$ dans des domaines à coins q-convexe attachés à la variété M. Finalement une solution fondamentale donnant les estimations $\mathcal{C}^k$ optimales est exhibée dans [4].

Les notations et la situation géométriques sont précisées dans la section 1 de cet article. Dans la section 2, nous présentons, en suivant les idées de [4], une méthode abstraite de construction de solutions fondamentales pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel dans les sous-variétés CR génériques de $\mathbb{C}^n$. Nous concrétisons cette construction dans la section 3 pour les variétés q-concaves et les hypersurfaces réelles qui vérifient la condition $Y(q)$ et nous donnons des estimations $\mathcal{C}^k$ et L^p pour les opérateurs intégraux associés. La section 4 est consacrée à la résolubilité locale de l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle avec des estimations L^p et hölreriennes jusqu'au bord.

1 Situation géométrique et notations

Soit M une sous-variété différentiable de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{C}^n$ de codimension réelle k, $1 \leq k \leq n$, définie par

$$M = \{z \in \omega | \widehat{\rho}_1(z) = \cdots = \widehat{\rho}_k(z) = 0\},$$

où ω est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\widehat{\rho}_1, \ldots, \widehat{\rho}_k$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur ω à valeurs réelles qui vérifient $d\widehat{\rho}_1(z) \wedge \cdots \wedge d\widehat{\rho}_k(z) \neq 0$ pour tout $z \in M$.

On note $T_z^{\mathbb{C}} M$ l'espace tangent complexe à M au point $z \in M$. On a

$$T_z^{\mathbb{C}} M = \{\xi \in \mathbb{C}^n | \sum_{j=1}^n \frac{\partial \widehat{\rho}_\nu}{\partial z_j}(z) \xi_j = 0, \nu = 1, \ldots, k\}.$$

On suppose que M est *Cauchy-Riemann (CR) générique*, c'est-à-dire que

$$\dim_{\mathbb{C}} T_z^{\mathbb{C}} M = n - k$$

pour tout $z \in M$, ce qui équivaut à

$$\overline{\partial}\widehat{\rho}_1(z) \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}\widehat{\rho}_k(z) \neq 0$$

pout tout $z \in M$.

On suppose également que M n'est pas totalement réelle, i.e. $k < n$, et que M satisfait les conditions suffisantes introduites par Kohn et Henkin pour la résolubilité locale de l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle, c'est-à-dire la condition $Y(q)$ pour les hypersurfaces et la q-concavité en codimension quelconque.

Définition 1.1. Une variété CR générique M de codimension réelle $k \geq 1$ est *q-concave* sur un voisinage U_{z_0} de $z_0 \in M$, $1 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$, si pour tout $z \in U_{z_0}$ et tout $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ la forme hermitienne sur $T_z^{\mathbb{C}}M$, $\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \widehat{\rho}_x}{\partial z_\alpha \partial \overline{z}_\beta} \xi_\alpha \overline{\xi}_\beta$, où $\widehat{\rho}_x = x_1\widehat{\rho}_1 + \cdots + x_k\widehat{\rho}_k$, possède au moins q valeurs propres strictement négatives.

Définition 1.2. Une hypersurface réelle orientée M de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, satisfait la condition $Y(q)$ sur un voisinage U_{z_0} de $z_0 \in M$, $1 \leq q \leq n-1$, si la forme de Levi de M possède en chaque point de U_{z_0} au moins $\min(n-q, q+1)$ paires de valeurs propres de signe contraire (i.e. M est $\min(n-q, q+1)$-concave) ou si la forme de Levi de M possède en chaque point de U_{z_0} au moins $\max(n-q, q+1)$ valeurs propres de même signe.

Par exemple une hypersurface strictement pseudoconvexe satisfait la condition $Y(q)$ pour $1 \leq q \leq n-2$.

Remarquons que, pour les hypersurfaces, la notion de q-concavité correspond à la première alternative de la condition $Y(q-1)$.

Si M est une hypersurface qui satisfait la seconde partie de la condition $Y(q)$ et si $\hat{\rho}$ est une fonction définissante pour M sur ω dont la forme de Levi restreinte à l'espace tangent complexe à M possède en chaque point de $\omega \cap M$ au moins $\max(n-q, q+1)$ valeurs propres strictement positives, en posant $\rho = -e^{C\hat{\rho}} + 1$, on obtient une nouvelle fonction définissante pour M sur ω dont la forme de Levi possède $\max(n-q, q+1) + 1$ valeurs propres strictement positives sur $U \subset\subset \omega$, si C est une constante positive suffisamment grande.

Si M est q-concave sur ω, d'après le Lemme 3.1.1 de [1], pour $j = 1, \ldots, k$, les fonctions

$$\rho_j = \widehat{\rho}_j + C \sum_{\nu=1}^{k} \widehat{\rho}_\nu^2$$

$$\rho_{-j} = -\widehat{\rho}_j + C \sum_{\nu=1}^{k} \widehat{\rho}_\nu^2.$$

possèdent la propriété suivante :

pour tout $I \in \mathcal{I}$ et tout $\lambda \in \Delta_I$ la forme de Levi de la fonction $\rho_\lambda = \lambda_{i_1}\rho_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_{|I|}}\rho_{i_{|I|}}$ admet au moins $q+k$ valeurs propres strictement positives sur $U \subset\subset \omega$,

si C est une constante positive suffisamment grande et si $\mathcal{I}$ désigne l'ensemble des parties $I \subset \{\pm 1, \ldots, \pm k\}$ telles que $|i| \neq |j|$ pour tous $i, j \in I$ tels que $i \neq j$, $|I|$ le nombre d'éléments de I et Δ_I le simplexe des suites $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ des nombres réels $\lambda_j \in [0,1]$ tels que $\lambda_j = 0$ si $j \notin I$ et $\sum \lambda_j = 1$.

On note $\mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, l'ensemble de tous les $I \in \mathcal{I}$ tels que $|I| = l$. On ordonne $I \in \mathcal{I}$ par le module de ses éléments et on note $\mathcal{I}'(l)$, $1 \leq l \leq k$, l'ensemble des multi-indices de longueur l tels que si $I = (i_1, \dots, i_l)$ alors $|i_\nu| = \nu$ pour $\nu = 1, \dots, l$. Si $I \in \mathcal{I}$ et $\nu \in \{1, \dots, |I|\}$, on pose $I(\widehat{\nu}) = I \setminus \{i_\nu\}$, où i_ν est le ν-ième élément de I après avoir ordonné I.

Finalement on pose

sgn$I = 1$ si le nombre d'éléments négatifs est pair

sgn$I = -1$ si le nombre d'éléments négatifs est impair.

Soient $I = (i_1, \dots, i_l)$ un multi-indice de $\mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, et D un domaine relativement compact dans U. On définit

$$
\begin{aligned}
&D_I = \{\rho_{i_1} < 0\} \cap \cdots \cap \{\rho_{i_{|I|}} < 0\} \cap D \\
&D_I^* = \{\rho_{i_1} > 0\} \cap \cdots \cap \{\rho_{i_{|I|}} > 0\} \cap D \\
&S_I = \{\rho_{i_1} = 0 = \cdots = \rho_{i_{|I|}} = 0\} \cap D \\
&S_{\{j\}}^+ = \overline{D}_{\{j\}} \quad \text{pour} \quad j = \pm 1, \dots, \pm k \\
&S_I^+ = S_{I(\widehat{|I|})} \cap \overline{D}_{\{i_{|I|}\}} \quad \text{si} \quad I \in \mathcal{I} \quad \text{and} \quad |I| \geq 2 \\
&\widetilde{S}_I = S_I \cap \{\rho_{|I|+1} > 0\} \cap \{\rho_{-(|I|+1)} > 0\} \quad \text{si} \quad 1 \leq |I| \leq k-1
\end{aligned}
$$

Notons que

$$
S_I = S_{I(|I|+1)}^+ \cup S_{I(-(|I|+1))}^+ \cup \widetilde{S}_I
$$

et que $\widetilde{S}_I = \emptyset$ si $|I| = k-1$. Ces variétés sont orientées comme suit : D_I et D_I^* comme $\mathbb{C}^n$ pour tout $I \in \mathcal{I}$, $S_{\{j\}}^+$ comme $D_{\{j\}}$ pour $j = \pm 1, \dots, \pm k$, S_I comme ∂S_I^+ pour tout $I \in \mathcal{I}$, S_I^+ comme $S_{I(\widehat{|I|})}$ pour tout $I \in \mathcal{I}$ si $|I| \geq 2$ et $M \cap D$ comme S_I si $I = \{1, \dots, k\}$.

On étend les définitions précédentes au cas où $|I| = 0$, c'est-à-dire $I = \emptyset$, en posant $S_\emptyset = D$ et $\widetilde{S}_\emptyset = S_\emptyset \cap \{\rho_1 > 0\} \cap \{\rho_{-1} > 0\}$.

Si f est une fonction définie sur un ouvert Ω de M, on définit la norme hölderienne d'ordre α, $0 < \alpha < 1$ de f par

$$
\|f\|_{\alpha,\Omega} = \sup_{z\in\Omega} |f(z)| + \sup_{\substack{z,\zeta\in\Omega \\ z\neq\zeta}} \frac{|f(z) - f(\zeta)|}{|z-\zeta|^\alpha}.
$$

Si M est de classe $\mathcal{C}^l$, on note $\mathcal{C}^{l+\alpha}(\Omega)$ l'espace de Fréchet des fonctions de classe $\mathcal{C}^l$ sur Ω dont toutes les dérivées tangentielles d'ordre l sont localement hölderiennes d'ordre α. Pour tout compact K de Ω, le maximum de la borne supérieure sur K des dérivées tangentielles d'ordre inférieur à l et de la norme hölderienne d'ordre α des dérivées tangentielles d'ordre l définit une semi-norme sur $\mathcal{C}^{l+\alpha}(\Omega)$.

Si f est une (n,r)-forme différentielle sur $\Omega \subset\subset M$, elle s'écrit $f = \sum_J f_J dz \wedge d\overline{z}_J$ avec $dz = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ et $d\overline{z}_J = d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_r}$, car M est plongée dans $\mathbb{C}^n$. La norme de f est alors donnée par le maximum des normes des f_J.

2 Formule de Bochner-Martinelli-Koppelman pour les variétés CR

L'objet de cette section est de montrer qu'une famille de noyaux satisfaisant une équation aux dérivées partielles adéquate et possédant de bonnes propriétés d'intégrabilité permet d'obtenir une formule de Bochner-Martinelli-Koppelman dans les variétés CR de codimension quelconque.

Nous nous plaçons dans la situation géométrique de la section 1.

Pour $I \in \mathcal{I}$, $0I$ désigne le multi-indice $(0, i_1, \ldots, i_{|I|})$, où $I = (i_1, \ldots, i_{|I|})$ est ordonné en module croissant.

Lorsque $I = \emptyset$, ce qui correspond à un multi-indice I de longueur nulle, on pose $C_0(z,\zeta) = B(z,\zeta)$, où $B(z,\zeta)$ désigne un noyau dans $\mathbb{C}^n$, c'est-à-dire une forme de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de degré $2n-1$ sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus \{(z,\zeta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \mid z = \zeta\}$.

On suppose que l'on sait associer à chaque multi-indice ordonné $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, des formes différentielles $C_{0I}(z,\zeta)$ de degré $2n - |I| - 1$ et $C_I(z,\zeta)$ de degré $2n - |I|$, de classe $\mathcal{C}^1$ pour $z \in \overline{D}_I$ et $\zeta \in \overline{D}_I^*$ tels que $z \neq \zeta$, qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\overline{\partial}_z C_{0I} + \overline{\partial}_\zeta C_{0I} = C_{0\delta(I)} - C_I, \tag{2.1}$$

où $C_{0\delta(I)} = \sum_{\nu=1}^{|I|} (-1)^{\nu+1} C_{0I(\widehat{\nu})}$.

On suppose également que les noyaux C_I satisfont les conditions d'annulation suivantes :

$$[C_I(z,\zeta)]_{p,r} = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq p \leq n \quad \text{et} \quad 1 \leq r_0 \leq r \leq r_1 \leq n-k, \tag{2.2}$$

$$\overline{\partial}_z [C_I(z,\zeta)]_{p,r_0-1} = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq p \leq n, \tag{2.3}$$

où $[C_I(z,\zeta)]_{p,r}$ désigne la partie de bidegré (p,r) en z de C_I.

Pour alléger les écritures on pose $B_I = C_{0I}$ pour tout $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$. L'équation 2.1 s'écrit alors

$$\overline{\partial}_z B_I + \overline{\partial}_\zeta B_I = B_{\delta(I)} - C_I \tag{2.4}$$

On suppose finalement que pour tout $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, les noyaux B_I vérifient les conditions d'intégrabilité suivantes :

- pour toute forme différentielle f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à support dans D, $\int_{\zeta \in S_I} f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta)$ définit une forme différentielle continue sur $\overline{D}_I$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D_I
- soit $j \in \{\pm 1, \ldots, \pm k\}$ tel que $I \cup \{j\} \in \mathcal{I}$, pour toute forme différentielle f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à support dans D, $\int_{\zeta \in S^+_{I \cup \{j\}}} f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta)$ définit une forme différentielle continue sur $\overline{D}_I$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D_I,
- pour $I = J$ ou $I = \delta(K)$ et $J = K(\widehat{|K|})$ avec $K \in \mathcal{I}(l+1)$, $\int_{\zeta \in \widetilde{S}_J} f_\varepsilon(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta)$ tend vers 0, quand ε tend vers 0, si f_ε est une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à support dans $D \cap \{|\rho_1| < \varepsilon\} \cap \cdots \cap \{|\rho_k| < \varepsilon\}$ telle que $\|\overline{\partial} f_\varepsilon\| = O(\frac{1}{\varepsilon})$ et $\int_{\zeta \in \widetilde{S}_J} f_\varepsilon(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta) = o(\varepsilon)$, si de plus $\overline{\partial} f_\varepsilon = 0$.

Définition 2.1. On appelle *famille de noyaux adaptés en degré* r, $r_0 \leq r \leq r_1$, à la variété CR générique M de codimension réelle k dans $\mathbb{C}^n$, toute famille de noyaux B_I et C_I, $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, possédant les propriétés précédentes.

Le noyau $B_M = \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I)B_I$ est le noyau sur M associé à la famille de noyaux adaptés à la variété M.

Lemme 2.2. *Le noyau $B_M = \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I)B_I$ est une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(M\cap U)\times(M\cap U)\setminus\{(z,\zeta)\in(M\cap U)\times(M\cap U)|z=\zeta\}$, de degré $2n-k-1$, tel que pour $0\le p\le n$ et $1\le r_0\le r\le r_1\le n-k$*

$$\overline{\partial}_\zeta[B_M]_{p,r} = -\overline{\partial}_z[B_M]_{p,r-1},$$

où $[B_M]_{p,r}$ désigne la composante de bidegré (p,r) en z de B_M (on pose $[B_M]_{p,n-k}=0$).

Démonstration. Rappelons que $B_M = \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I)B_I$. La formule 2.4 donne alors immédiatement

$$\overline{\partial}_z B_M + \overline{\partial}_\zeta B_M = \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I)B_{\delta(I)} - \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I)C_I.$$

On sait, grâce aux propriétés d'annulation des noyaux C_I que $[C_I(z,\zeta)]_{p,r}=0$ si $0\le p\le n$ et $1\le r_0\le r\le r_1\le n-k$, par conséquent

$$\overline{\partial}_z[B_M]_{p,r-1} + \overline{\partial}_\zeta[B_M]_{p,r} = \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I)[B_{\delta(I)}]_{p,r}.$$

De plus par définition de $\operatorname{sgn}(I)$ et $\delta(I)$, on a $\sum_{I\in\mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I)[B_{\delta(I)}]_{p,r}=0$. En effet pour un multi-indice donné $J\in\mathcal{I}(k-1)$, il existe deux multi-indices I_1 et I_2 dans $\mathcal{I}(k)$ tels que $J=I_1(\hat{\nu})=I_2(\hat{\nu})$ qui vérifient $\operatorname{sgn}(I_1)=-\operatorname{sgn}(I_2)$ car, d'un point de vue ensembliste, si $I_1=J\cup\{\nu\}$ alors $I_2=J\cup\{-\nu\}$. □

La proposition suivante a été prouvée dans [4] en associant la formule de Stokes à la formule 2.1.

Proposition 2.3. *Soit f une (n,r)-forme de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact dans D,$1\le r_0\le r\le r_1\le n-k$, alors on a la formule suivante au sens des courants sur M*

$$\begin{aligned}(-1)^{r+n}(\overline{\partial}_z \int_{\zeta\in D} f(\zeta)\wedge B(z,\zeta) - \int_{\zeta\in D} \overline{\partial} f(\zeta)\wedge B(z,\zeta))\\ = (-1)^{(k+1)(r+n)+\frac{k(k-1)}{2}}(\overline{\partial}_b \int_{\zeta\in M} f(\zeta)\wedge B_M(z,\zeta)\\ + (-1)^{k+1}\int_{\zeta\in M} \overline{\partial}_b f(\zeta)\wedge B_M(z,\zeta)).\end{aligned}$$

Pour obtenir une formule d'homotopie pour les formes à support compact dans $D\cap M$, il suffit alors que le noyau initial $C_0=B$ satisfasse

$$f(z) = (-1)^{r+n}(\overline{\partial}_z \int_{\zeta\in D} f(\zeta)\wedge B(z,\zeta) - \int_{\zeta\in D} \overline{\partial} f(\zeta)\wedge B(z,\zeta)),$$

pour toute (n,r)-forme f de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact dans D. C'est le cas par exemple si B désigne le noyau de Bochner-Martinelli-Koppelman dans $\mathbb{C}^n$.

Corollaire 2.4. *Si le terme initial $C_0 = B$ d'une famille de noyaux adaptés à la variété M en degré r, $1 \leq r_0 \leq r \leq r_1 \leq n-k$ au voisinage d'un point z_0 de M est une solution fondamentale de l'opérateur de Cauchy-Riemann dans $\mathbb{C}^n$, alors le noyau associé $B_M = \sum_{I \in \mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I) B_I$ est une solution fondamentale en degré r, $1 \leq r_0 \leq r \leq r_1 \leq n-k$, de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel sur le voisinage $U_{z_0} = U \cap M$ de z_0.*

Plus précisément B_M est une forme différentielle définie sur $U_{z_0} \times U_{z_0} \setminus \Delta(U_{z_0})$, où $\Delta(U_{z_0}) = \{(z,\zeta) \in U_{z_0} \times U_{z_0} \mid z = \zeta\}$ désigne la diagonale de $U_{z_0} \times U_{z_0}$, qui vérifie au sens des courants

$$\overline{\partial}_{b,z}[B_M]_{p,r-1} + \overline{\partial}_{b,\zeta}[B_M]_{p,r} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}[\Delta(U_{z_0})], \tag{2.5}$$

si $[B_M]_{p,r}$ désigne la composante de bidegré (p,r) en z de B_M, $0 \leq p \leq n$ et $1 \leq r_0 \leq r \leq r_1 \leq n-k$, et $[\Delta(U_{z_0})]$ le courant d'intégration sur la diagonale de $U_{z_0} \times U_{z_0}$.

On en déduit aisément la formule de représentation intégrale suivante :

Théorème 2.5. *Soit Ω un domaine à bord $\mathcal{C}^1$ relativement compact dans U_{z_0} et f une (n,r)-forme de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\overline{\Omega}$, $1 \leq r_0 \leq r \leq r_1 \leq n-k$, alors on a la formule suivante au sens des courants sur M*

$$\begin{aligned}(-1)^{(k+1)(r+n)+\frac{k(k-1)}{2}} f(z) &= \overline{\partial}_b \int_{\zeta \in \Omega} f(\zeta) \wedge B_M(z,\zeta) \\ &+ (-1)^{k+1} \int_{\zeta \in \Omega} \overline{\partial}_b f(\zeta) \wedge B_M(z,\zeta) + (-1)^k \int_{\zeta \in \partial\Omega} f(\zeta) \wedge B_M(z,\zeta).\end{aligned}$$

On peut remarquer que la formule ci-dessus fournit une formule d'homotopie pour les formes à support compact dans U_{z_0}.

Le noyau initial B_0 utilisé pour construire la solution fondamentale de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel sur M n'a pas de lien direct avec la variété M. On aimerait pouvoir construire d'autres solutions fondamentales ne dépendant que de la géométrie de M dans le but d'obtenir des estimations optimales. Pour cela nous allons considérer séparément le cas des hypersurfaces et le cas de la codimension supérieure ou égale à 2.

Si M est une hypersurface, alors $\mathcal{I}'(1)$ possède deux éléments $I_1 = (+1)$ et $I_2 = (-1)$. On considére les deux multi-indices $J_1 = I_1 I_2 = (+1,-1)$ et $J_2 = I_2 I_1 = (-1,+1)$ et on suppose que l'on sait associer à chacun d'eux des formes différentielles $C_{0J_i}(z,\zeta)$ de degré $2n-3$ et $C_{J_i}(z,\zeta)$ de degré $2n-2$, de classe $\mathcal{C}^1$ pour $z \in M$ et $\zeta \in M$ tels que $z \neq \zeta$, $i = 1,2$, qui satisfont $C_{J_1} = -C_{J_2}$ et qui vérifient les équations aux dérivées partielles

$$\begin{aligned}\overline{\partial}_{b,z} C_{0J_1} + \overline{\partial}_{b,\zeta} C_{0J_1} &= -C_{0I_1} + C_{0I_2} - C_{J_1}, \\ \overline{\partial}_{b,z} C_{0J_2} + \overline{\partial}_{b,\zeta} C_{0J_2} &= -C_{0I_2} + C_{0I_1} - C_{J_2}.\end{aligned}$$

au sens des courants sur $M \times M$. En faisant la différence de ces deux équations on obtient

$$\overline{\partial}_{b,(z,\zeta)}(C_{0J_1} - C_{0J_2}) = 2(-B_M - C_{(+1,-1)}),$$

d'où $\overline{\partial}_{b,(z,\zeta)} C_{(+1,-1)} = -\overline{\partial}_{b,(z,\zeta)} B_M = [\Delta(U_{z_0})]$. Le noyau $R_M = C_{(+1,-1)}$ est donc une nouvelle solution fondamentale de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel sur M.

Supposons maintenant que M est de codimension k, $k \geq 2$. On note $\mathcal{I}'(l,*)$, $l \leq k$, l'ensemble des multi-indices de la forme $I*$, avec $I \in \mathcal{I}'(l)$ et on suppose que l'on sait associer à chaque multi-indice ordonné $J = I*$, $I \in \mathcal{I}'(l)$, des formes différentielles $C_{0J}(z,\zeta)$ de degré $2n - |I| - 2$ et $C_J(z,\zeta)$ de degré $2n - |I| - 1$, de classe $\mathcal{C}^1$ pour $(z,\zeta) \in M \times M$ tels que $z \neq \zeta$, qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\overline{\partial}_{b,z} C_{0I*} + \overline{\partial}_{b,\zeta} C_{0I*} = (-1)^k C_{0I} + C_{0\delta(I)*} - C_{I*}. \tag{2.6}$$

On suppose de plus que ces noyaux sont suffisamment réguliers pour que l'équation (2.6) soit satisfaite au sens des courants sur $M \times M$. (Contrairement au cas des hypersurfaces, où l'indice ajouté dépendait du multi-indice I, ici l'indice * est le même pour tous les indices I, sinon l'idée de base est la même.)

On définit R_M par $R_M = \sum_{I \in \mathcal{I}'(k)} \mathrm{sgn}(I) C_{I*}$, il satisfait alors

$$\overline{\partial}_{b,z}\Big(\sum_{I \in \mathcal{I}'(k)} \mathrm{sgn}(I) C_{0I*}\Big) + \overline{\partial}_{b,\zeta}\Big(\sum_{I \in \mathcal{I}'(k)} \mathrm{sgn}(I) C_{0I*}\Big) = (-1)^k B_M - R_M \tag{2.7}$$

au sens des courants sur $U_{z_0} \times U_{z_0}$. Par conséquent si B_M est une solution fondamentale en degré r de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel sur un voisinage U_{z_0} de z_0, il en est de même de R_M et la formule de représentation intégrale du Théorème 2.5 est encore valable si on remplace B_M par $(-1)^k R_M$.

3 Construction de noyaux adaptés à une variété CR

Etant donnée une sous-variété CR générique M de classe $\mathcal{C}^3$, de codimension réelle k dans $\mathbb{C}^n$ et un point z_0 de M, nous allons construire une famille de noyaux adaptés à M au sens de la Définition 2.1 au voisinage de z_0 à partir de formes de Cauchy-Fantappié.

Nous reprenons les notations de la section 1.

Définition 3.1. Une *section de Leray associée à M* sur un voisinage U de $\overline{D}$ est une application ψ qui associe à chaque multi-indice $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, une application à valeurs dans $\mathbb{C}^n$

$$\psi_I(z,\zeta,\lambda) = (\psi_I^1(z,\zeta,\lambda), \ldots, \psi_I^n(z,\zeta,\lambda))$$

définie et de classe $\mathcal{C}^1$ pour $z \in \overline{D}_I$, $\zeta \in \overline{D}_I^*$ tels que $z \neq \zeta$ et $\lambda \in \Delta_I$, telle que

$$\langle \psi_I(z,\zeta,\lambda), \zeta - z\rangle = 1,$$

et

$$\psi_I|_{(\overline{D}_J \times \overline{D}_J^*)\setminus\{z=\zeta\}\times\Delta_I} = \psi_J|_{(\overline{D}_J \times \overline{D}_J^*)\setminus\{z=\zeta\}\times\Delta_I} \quad \text{si} \quad I \subset J.$$

Nous utiliserons des sections de Leray de la forme suivante :

$$\psi(z,\zeta,\lambda) = \frac{w(z,\zeta,\lambda)}{\langle w(z,\zeta,\lambda), \zeta - z\rangle}, \tag{3.1}$$

où w est une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}^n$, et nous désignerons par $\Phi(z,\zeta,\lambda) = \langle w(z,\zeta,\lambda), \zeta - z\rangle$ le dénominateur de ψ.

Pour $\lambda \in \Delta_I$, si ρ_λ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de z_0 dont la forme de Levi possède en tout point au moins s valeurs propres srtictement positives, on peut construire, à l'aide du polynôme de Levi de ρ_λ, une fonction $w(z,\zeta,\lambda)$ qui est s-holomorphe en la variable z (i.e. il existe des coordonnées holomorphes $h_1,\dots,h_n$ au voisinage de chaque point telles que w soit holomorphe par rapport à $h_1,\dots,h_s$) et telle que $\Phi(z,\zeta,\lambda)$ vérifie l'estimation

$$\mathrm{Re}\Phi(z,\zeta,\lambda) \geq \rho_\lambda(\zeta) - \rho_\lambda(z) + \alpha|\zeta - z|^2 \tag{3.2}$$

pour z et ζ au voisinage de z_0 avec α un réel strictement positif.

Nous considérons également la section de Bochner-Martinelli ψ_0 définie pour $z \in \mathbb{C}^n$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$ tels que $z \neq \zeta$ par

$$\psi_0(z,\zeta) = \frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{|\zeta - z|^2}.$$

Le noyau de Bochner-Martinelli-Koppelman est alors donné par la formule

$$B(z,\zeta) == \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n}\langle \psi_0, d(\zeta - z)\rangle \wedge \langle \overline{\partial}_{z,\zeta}\psi_0, d(\zeta - z)\rangle^{n-1}.$$

3.1 Cas des hypersurfaces vérifiant la condition Y(q)

Si M est une hypersurface réelle orientée de $\mathbb{C}^n$, on note $I_1 = (+1)$ et $I_2 = (-1)$ les deux éléments de $\mathcal{I}'(1)$. On définit les noyaux C_{I_i} et C_{0I_i}, $i = 1,2$, en posant

$$C_{I_i} = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n}\langle \psi_{I_i}, d(\zeta - z)\rangle \wedge \langle \overline{\partial}_{z,\zeta}\psi_{I_i}, d(\zeta - z)\rangle^{n-1},$$

$$\begin{aligned} C_{0I_i} = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n}&\langle \psi_0, d(\zeta - z)\rangle \wedge \langle \psi_{I_i}, d(\zeta - z)\rangle \\ &\wedge \sum_{j+k=n-2} \langle \overline{\partial}_{z,\zeta}\psi_0, d(\zeta - z)\rangle^j \wedge \langle \overline{\partial}_{z,\zeta}\psi_{I_i}, d(\zeta - z)\rangle^k. \end{aligned}$$

D'après [5], Chap. 20, ces noyaux vérifient

$$\overline{\partial}_z C_{0I_i} + \overline{\partial}_\zeta C_{0I_i} = B - C_{I_i},$$

ce qui correspond à l'équation (2.1). Le formalisme utilisé ici est dû à Harvey et Polking.

Il reste à choisir les sections de Leray ψ_{I_1} et ψ_{I_2} pour que les conditions d'intégrabilité et les conditions d'annulation de la section 2 soient satisfaites.

Nous allons supposer que l'hypersurface M satisfait la condition $Y(q)$ de Kohn (cf. Définition 1.2).

Supposons que la forme de Levi de M possède en chaque point de U au moins s valeurs propres de même signe. L'hypersurface M admet alors une fonction définissante ρ_+ sur U, dont la forme de Levi possède au moins $s+1$ valeurs propres de même signe au voisinage de z_0. Notons $\psi_{I_1}(z,\zeta)$ la section de Leray du type (3.1) construite à partir du polynôme de Levi de ρ_+ et posons $\psi_{I_2}(z,\zeta) = \psi_{I_1}(\zeta,z)$. La section de Leray $\psi_{i_1}(z,\zeta)$ est alors $(s+1)$-holomorphe par rapport à la variable z et la section de Leray $\psi_{I_2}(z,\zeta)$ est

$(s+1)$-holomorphe par rapport à la variable ζ. On voit alors facilement que les noyaux C_{I_i} vérifient les conditions d'annulation (2.2) avec $r_0 = n-s$ et $r_1 = s-1$. De plus l'estimation 3.2 assure que les conditions d'intégrabilité de la section 2 sont satisfaites.

Si M satisfait à la seconde partie de la condition $Y(q)$, le noyau B_M donné par $B_M = C_{0I_1} - C_{0I_2}$ est alors une solution fondamentale de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel en degré r pour $q \leq r \leq n-q-1$, si $1 \leq q \leq \frac{n-1}{2}$ et pour $n-q-1 \leq r \leq q$, si $\frac{n-1}{2} \leq q \leq n-2$ sur $U_{z_0} = U \cap M$.

Pour obtenir le noyau R_M, nous avons besoin des noyaux suivants :

$$C_{0I_1I_2} = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n} \langle \psi_0, d(\zeta - z)\rangle \wedge \langle \psi_{I_1}, d(\zeta - z)\rangle \wedge \langle \psi_{I_2}, d(\zeta - z)\rangle \\ \wedge \sum_{j+k+l=n-3} \langle \overline{\partial}_{z,\zeta}\psi_0, d(\zeta - z)\rangle^j \wedge \langle \overline{\partial}_{z,\zeta}\psi_{I_i}, d(\zeta - z)\rangle^k \wedge \langle \overline{\partial}_{z,\zeta}\psi_{I_2}, d(\zeta - z)\rangle^l,$$

$$C_{I_1I_2} = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n} \langle \psi_{I_1}, d(\zeta - z)\rangle \wedge \langle \psi_{I_2}, d(\zeta - z)\rangle \wedge \\ \sum_{j+k=n-2} \langle \overline{\partial}_{z,\zeta}\psi_{I_1}, d(\zeta - z)\rangle^j \wedge \langle \overline{\partial}_{z,\zeta}\psi_{I_2}, d(\zeta - z)\rangle^k.$$

D'après [5], Chap. 21, ils vérifient les équations aux dérivées partielles

$$\overline{\partial}_{b,(z,\zeta)} C_{0I_1I_2} = -C_{0I_1} + C_{0I_2} - C_{I_1I_2}, \\ \overline{\partial}_{b,(z,\zeta)} C_{0I_2I_1} = -C_{0I_2} + C_{0I_1} - C_{I_2I_1}.$$

au sens des courants sur $M \times M$.

Le noyau $R_M = C_{I_1I_2}$ est donc une solution fondamentale de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel pour les mêmes degrés que B_M, mais dont l'expression ne fait intervenir que des sections de Leray liées à M.

Dans le cas où M est le bord d'un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, le noyau R_M permet de construire une solution de l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle sur M.

Théorème 3.2. *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ à bord de classe $\mathcal{C}^2$ et ρ une fonction définissante pour D de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que la forme de Levi de ρ possède au moins $q+1$ valeurs propres stictement positives, $q \geq \frac{n-1}{2}$ (i.e. D est strictement q-convexe au sens de Henkin-Leiterer). Si f est une (n,r)-forme continue sur ∂D, $n-q \leq r \leq q-1$ telle que $\overline{\partial}_b f = 0$, on a pour $z \in \partial D$*

$$f(z) = \overline{\partial}_b \int_{\partial D} f(\zeta) \wedge R_M(z,\zeta).$$

Le cas $q = n-1$, qui correspond aux domaines strictement pseudoconvexes, a été étudié par Henkin [10], Romanov [17] et Skoda [22].

Supposons maintenant que la forme de Levi de M possède en chaque point de U au moins s paires de valeurs propres de signe contraire. Ce cas a été considéré par M.C. Shaw dans [21].

L'hypersurface M admet alors une fonction définissante ρ_+ sur U, dont la forme de Levi possède au moins $s+1$ valeurs propres strictement positives et une fonction définissante ρ_- sur U, dont la forme de Levi possède au moins $s+1$ valeurs propres strictement négatives. Notons $\psi_{I_1}(z,\zeta)$ la section de Leray du type (3.1) construite à partir du polynôme de Levi de ρ_+ et $\psi_{I_2}(z,\zeta)$ la section de Leray du type (3.1) construite à partir du polynôme de Levi de ρ_-. Les sections de Leray $\psi_{I_1}(z,\zeta)$ et $\psi_{I_2}(z,\zeta)$ sont alors $(s+1)$-holomorphe par rapport à la variable z. Les noyaux C_{I_i} vérifient donc les conditions d'annulation (2.2) avec $r_0 = n-s$ et $r_1 = n-1$. De plus l'estimation 3.2 assure que les conditions d'intégrabilité de la section 2 sont satisfaites. Si on échange le rôle des variables z et ζ dans les sections de Leray ψ_{i_1} et ψ_{I_2}, les noyaux C_{I_i} vérifient les conditions d'annulation (2.2) avec $r_0 = 1$ et $r_1 = s-1$.

Si M satisfait à la première partie de la condition $Y(q)$ avec $q \leq \frac{n-1}{2}$, i.e. M est $(q+1)$-concave, alors B_M et R_M sont des solutions fondamentales de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel en degré r pour $1 \leq r \leq q$ et pour $n-q-1 \leq r \leq n-1$.

Si f est une (n,r)- forme continue à support compact dans $U \cap M$, on définit les opérateurs

$$\widetilde{B}_M f = \int_M f(\zeta) \wedge B_M(z,\zeta),$$
$$\widetilde{R}_M f = \int_M f(\zeta) \wedge R_M(z,\zeta).$$

Ces opérateurs satisfont des estimations $\mathcal{C}^l$ et L^p optimales.

Théorème 3.3. *Si M est de classe $\mathcal{C}^3$ et si $\widetilde{T}$ désigne l'un des opérateurs $\widetilde{B}_M$ ou $\widetilde{R}_M$, les estimations suivantes sont satisfaites :*

(1) $\|\widetilde{T}f\|_{L^{\frac{2n}{2n-1}-\epsilon}} \leq C\|f\|_{L^1}$, *pour tout* $\epsilon > 0$ *assez petit.*

(2) $\|\widetilde{T}f\|_{L^{p'}} \leq C\|f\|_{L^p}$, *si* $\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2n}$ *et* $1 < p < 2n$.

(3) $\|\widetilde{T}f\|_{L^{p'}} \leq C\|f\|_{L^p}$, *si* $p = 2n$ *et* $p < p' < \infty$.

(4) $\|\widetilde{T}f\|_{\mathcal{C}^\alpha} \leq C\|f\|_{L^p}$, *si* $2n < p < \infty$, $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{n}{p}$.

(5) $\|\widetilde{T}f\|_{\mathcal{C}^{\frac{1}{2}}} \leq C\|f\|_{L^\infty}$.

(6) $\|\widetilde{T}f\|_{\mathcal{C}^{l+\frac{1}{2}}} \leq C\|f\|_{\mathcal{C}^l}$, *si* M *est de classe* $\mathcal{C}^{l+3}$, $l \in \mathbb{N}$.

Les estimations L^p et hölderiennes sont dues à Henkin [10] et Skoda [22], lorsque M est le bord d'un domaine strictement pseudoconvexe. Elles ont permis à Henkin et Skoda de construire des fonctions de la classe de Nevanlinna, dont les zéros sont imposés dans un domaine strictement pseudoconvexe. Les estimations $\mathcal{C}^l$ sont prouvées dans [5]. Dans le cas où la signature de la forme de Levi de M est mixte, les estimations du Théorème 3.3 sont démontrées dans [21].

3.2 Cas des variétés CR génériques q-concaves

En codimension $k \geq 2$, l'équivalent naturel de la condition $Y(q)$ est la notion de q-concavité, $1 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$.

On se place dans la situation géométrique décrite dans la section 1.

Soit $\overset{\circ}{\chi}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[0,1]$ dans lui-même qui vérifie $\overset{\circ}{\chi}(\lambda) = 0$ si $0 \leq \lambda \leq 1/4$ et $\overset{\circ}{\chi}(\lambda) = 1$ si $1/2 \leq \lambda \leq 1$.

Si $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, pour $\lambda \in \Delta_{0I}$ tel que $\lambda_0 \neq 1$, on note $\overset{\circ}{\lambda}$ le point de Δ_I défini par

$$\overset{\circ}{\lambda}_{i_\nu} = \frac{\lambda_{i_\nu}}{1-\lambda_0} \quad (\nu = 1, \dots, l).$$

Soit ψ une section de Leray associée à M au voisinage de $\overline{D}$, on pose

$$\psi_{0I}(z,\zeta,\lambda) = \overset{\circ}{\chi}(\lambda_0)\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{|\zeta - z|^2} + (1 - \overset{\circ}{\chi}(\lambda_0))\psi_I(z,\zeta,\overset{\circ}{\lambda}) \tag{3.3}$$

pour tout $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, $z \in \overline{D}_I$, $\zeta \in \overline{D}_I^*$ tels que $z \neq \zeta$ et $\lambda \in \Delta_{0I}$.

On peut alors définir les noyaux $K_{0I}(z,\zeta,\lambda)$, pour $z \in \overline{D}_I$, $\zeta \in \overline{D}_I^*$ tels que $z \neq \zeta$ et $\lambda \in \Delta_{0I}$, par

$$K_{0I}(z,\zeta,\lambda) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n}\langle \psi_{0I}, d(\zeta - z)\rangle \wedge \langle (\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\psi_{0I}, d(\zeta - z)\rangle^{n-1}, \tag{3.4}$$

et les noyaux $K_I(z,\zeta,\lambda)$ par

$$K_I(z,\zeta,\lambda) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n}\langle \psi_I, d(\zeta - z)\rangle \wedge \langle (\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\psi_I, d(\zeta - z)\rangle^{n-1}. \tag{3.5}$$

Les noyaux K_{0I} et K_I sont des formes différentielles de classe $\mathcal{C}^1$ et de degré $2n-1$ et on a

$$(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)K_{0I}(z,\zeta,\lambda) = 0 \tag{3.6}$$

d'après la Proposition 3.9 de [12].

Pour finir on pose, pour $z \in \overline{D}_I$, $\zeta \in \overline{D}_I^*$ tels que $z \neq \zeta$,

$$C_{0I}(z,\zeta) = \int_{\lambda \in \Delta_{0I}} K_{0I}(z,\zeta,\lambda)$$
$$C_I(z,\zeta) = \int_{\lambda \in \Delta_I} K_I(z,\zeta,\lambda)$$

Les noyaux $C_{0I}(z,\zeta)$ et $C_I(z,\zeta)$ sont des formes différentielles respectivement de degré $2n - |I| - 1$ et de degré $2n - |I|$, de classe $\mathcal{C}^1$ pour $z \in \overline{D}_I$ et $\zeta \in \overline{D}_I^*$ tels que $z \neq \zeta$. La formule de Stokes et la relation

$$\partial \Delta_{0I} = \sum_{\nu=1}^{|I|} (-1)^\nu \Delta_{0I(\widehat{\nu})} + \Delta_I$$

impliquent qu'ils vérifient l'équation (2.1).

Si ψ est une section de Leray de la forme (3.1), dont le dénominateur Φ vérifie l'estimation (3.2), les conditions d'intégrabilité de la section 2 sont remplies.

Si de plus la section de Leray ψ est s-holomorphe en la variable z les conditions d'annulation du paragraphe 2 sont satisfaites pour $r_0 = n - s + 1$ et $r_1 = n - k$ et si ψ est s-holomorphe en la variable ζ les conditions d'annulation du paragraphe 2 sont satisfaites pour $r_0 = 1$ et $r_1 = s - k - 1$.

Il résulte de [14] que, si M est q-concave, on peut lui associer des sections de Leray ψ_I continues en $\lambda \in \Delta_I$ telles que $\psi_I(z, \zeta, .) = \psi_J(z, \zeta, .)|_{\Delta_I}$, si $I \subset J$ et $(q + k)$-holomorphes en la variable z. Ces sections sont construites à partir du polynôme de Levi de la fonction ρ_λ et d'une application continue T de $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ dans la grassmannienne des sous espaces de dimension $q' + k$ de $\mathbb{C}^n$, avec q' l'ordre maximal de concavité de M en z_0, telle que la forme de Levi de ρ_λ sur U soit définie positive sur $T(\lambda)$. En échangeant les rôles des variables z et ζ, nous obtiendrons des sections $(q + k)$-holomorphes en la variable ζ.

Le noyau B_M construit à partir des noyaux définis ici est une solution fondamentale sur $U_{z_0} = U \cap M$ de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel en degré r pour $1 \leq r \leq q - 1$ et $n - k - q + 1 \leq r \leq n - k$ (cf. [4]).

Dans le cas des hypersurfaces ce noyau a été introduit par Fischer [7] et il permet d'obtenir des estimations $\mathcal{C}^l$ optimales pour la résolution de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel (cf. (6) du Th. 3.3). Malheureusement en codimension $k \geq 2$, il y a une perte de ϵ arbitrairement petit dans les mêmes estimations, le terme perturbateur provenant de la section de Bochner-Martinelli. Il faut donc construire un nouveau noyau plus adapté à la géométrie de M.

Comme dans la section 2, on note $\mathcal{I}'(l, *)$, $l \leq k$, l'ensemble des multi-indices de la forme $I*$, avec $I \in \mathcal{I}'(l)$. On pose $\rho_* = \rho_1 + \cdots + \rho_k$ et on considère la fonction w_* déduite du polynôme de Levi de ρ_*. On construit w_{I*} en interpolant w_I et w_* et on note ψ_{I*} la section de Leray associée, dont le dénominateur vérifie l'estimation 3.2.

On peut alors définir les noyaux $K_{0I*}(z, \zeta, \lambda)$ et $K_{I*}(z, \zeta, \lambda)$, pour $(z, \zeta, \lambda) \in (U_{z_0} \times U_{z_0} \setminus \Delta(U_{z_0})) \times \Delta_{0I}$, par

$$K_{0I*}(z, \zeta, \lambda) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n} \langle \psi_{0I*}, d(\zeta - z) \rangle \wedge \langle (\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda) \psi_{0I*}, d(\zeta - z) \rangle^{n-1},$$

$$K_{I*}(z, \zeta, \lambda) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n} \langle \psi_{I*}, d(\zeta - z) \rangle \wedge \langle (\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda) \psi_{I*}, d(\zeta - z) \rangle^{n-1}.$$

On pose, pour $(z, \zeta) \in U_{z_0} \times U_{z_0} \setminus \Delta(U_{z_0})$,

$$C_{0I*}(z, \zeta) = \int_{\lambda \in \Delta_{0I*}} K_{0I*}(z, \zeta, \lambda)$$

$$C_{I*}(z, \zeta) = \int_{\lambda \in \Delta_{I*}} K_{I*}(z, \zeta, \lambda).$$

D'après [4], ces noyaux vérifient l'équation aux dérivées partielles (2.6). On peut donc en déduire une nouvelle solution fondamentale R_M pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel sur M en degré r, $1 \leq r \leq q - 1$ et $n - k - q + 1 \leq r \leq n - k$.

La nouvelle solution fondamentale R_M permet cette fois d'obtenir les estimations $\mathcal{C}^l$ optimales pour la résolution de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel, c'est-à-dire avec un gain de régularité de $\frac{1}{2}$; elles sont démontrées dans [4]. Concernant les estimations L^p, il est prouvé dans [15] que R_M est de type faible $\frac{2n}{2n-1}$. Par conséquent l'opérateur intégral associé à R_M satisfait les estimations du Théorème 3.3.

4 Résolution locale de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel avec estimations jusqu'au bord

Dans les sections précédentes nous avons donné des résultats concernant la résolution de l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle pour des seconds membres à support compact.

Soit Ω un domaine à bord $\mathcal{C}^1$ relativement compact dans $M \cap U$. On veut construire de nouveaux noyaux prenant en compte la géométrie de Ω pour transformer la formule de représentation intégrale du Théorème 2.5 en une formule d'homotopie.

Notons $\bullet$ un nouvel indice. Pour tout $J \in \mathcal{I}'(l,*)$, $l \leq k$, on considère des formes différentielles $C_{0J\bullet}(z,\zeta)$ de degré $2n-|I|-3$ et $C_{J\bullet}(z,\zeta)$ de degré $2n-|I|-2$, de classe $\mathcal{C}^1$ pour $(z,\zeta) \in \Omega \times \Omega$ tels que $z \neq \zeta$, qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\overline{\partial}_{b,z} C_{0J\bullet} + \overline{\partial}_{b,\zeta} C_{0J\bullet} = (-1)^k C_{0J} + C_{0\delta(J)\bullet} - C_{J\bullet}. \tag{4.1}$$

On suppose de plus que ces noyaux sont suffisamment réguliers pour que l'équation (4.1) soit satisfaite au sens des courants sur $M \times M$.

On dira que les noyaux $C_{J\bullet}$ sont adaptés au domaine Ω s'ils vérifient la condition d'annulation

$$[C_{J\bullet}(z,\zeta)]_{p,r} = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq p \leq n \quad \text{et} \quad 1 \leq r_0 \leq r \leq r_1 \leq n-k, \tag{4.2}$$

où $[C_{J\bullet}(z,\zeta)]_{p,r}$ désigne la partie de bidegré (p,r) en z de $C_{J\bullet}$.

On pose $G_{M,\Omega} = \sum_{I \in \mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I) C_{0J\bullet}$ et on définit l'opérateur T_r sur les (n,r)-formes continues sur $\overline{\Omega}$ par

$$T_r g = (-1)^{(k+1)(r+n)+\frac{k(k-1)}{2}} [\int_{\zeta\in\Omega} g(\zeta) \wedge R_M(z,\zeta) + (-1)^{n+r+1} \int_{\zeta\in\partial\Omega} g(\zeta) \wedge G_{M,\Omega}(z,\zeta)].$$

On déduit aisément de (4.1) et de la formule de Stokes le théorème suivant :

Théorème 4.1. *Etant donnés une famille de noyaux adaptés à M sur un voisinage U_{z_0} d'un point z_0, un domaine Ω à bord $\mathcal{C}^1$ relativement compact dans $M \cap U_{z_0}$, et une famille de noyaux adaptés au domaine Ω, les opérateurs T_r vérifient la formule d'homotopie*

$$f = \overline{\partial}_b T_r f + T_{r+1} \overline{\partial}_b f, \tag{4.3}$$

si f est une (n,r)-formes de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{\Omega}$, $1 \leq r_0 \leq r \leq r_1 \leq n-k$.

Si M est q-concave et si Ω est l'intersection transverse de M avec un domaine $\widetilde{\Omega}$ strictement pseudoconvexe, soit $\psi_\bullet$ la section de Leray définie par Henkin et Lieb pour $\widetilde{\Omega}$. Les noyaux construits sur le modèle de ceux de la section 3.2 en remplaçant le multi-indice I par le multi-indice J et l'indice $*$ par l'indice $\bullet$ sont adaptés à Ω avec $r_0 = n-k-q+1$ et $r_1 = n-k$. Sous ces hypothèses géométriques, le Théorème 4.1 est prouvé dans [15].

Si M est q-concave et si Ω est l'intersection transverse de M avec le complémentaire d'un domaine $\widetilde{\Omega}$ strictement pseudoconvexe et une petite boule centrée sur le bord de ce domaine, Sambou et Touré [18] ont construit, par des méthodes analogues, des noyaux adaptés à Ω avec $r_0 = 1$ et $r_1 = q-2$. Ils obtiennent ainsi une formule d'homotopie en degré $1 \leq r \leq q-3$ et une formule de résolution en degré $q-2$ après restriction de la petite boule.

Les opérateur T_r sont continus de $\mathcal{C}_{n,r}(\overline{\Omega})$ dans $\mathcal{C}^{1/2-\epsilon}_{n,r-1}(\overline{\Omega})$ pour tout $0<\epsilon<1/2$. Contrairement au cas de la régularité intérieure où, en construisant un nouveau noyau, on a pu prouver les estimations höldériennes avec le gain optimal de $1/2$, on ignore si on peut éliminer la perte de ϵ arbitrairement petit dans les estimations au bord. Ce phénomène est analogue à celui qui intervient dans les estimations au bord pour l'opérateur de Cauchy-Riemann dans l'intersection de domaines strictement pseudoconvexes (cf. [16]).

Par ailleurs, après une modification classique du dénominateur des sections de Leray (il s'agit de remplacer $\Phi_\bullet$ par $\widetilde{\Phi}_\bullet(z,\zeta)=\Phi(z,\zeta)-2\rho_\bullet(\zeta))$, on a contruit dans [15] des opérateurs $\widetilde{T}_r$ de résolution pour l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle sur Ω.

Théorème 4.2. *Soit M une variété CR générique q-concave de $\mathbb{C}^n$ et $z_0\in M$. Soit $\widetilde{\Omega}$ un domaine strictement pseudoconvexe à bord C^3 de $\mathbb{C}^n$ contenant z_0 et $\Omega=M\cap\widetilde{\Omega}$. Il existe des opérateurs $\widetilde{T}_r$ tels que pour toute $f\in L^p_{(n,r)}(\Omega)$ telle que $\overline{\partial}_b f=0$ dans Ω, $1\leq p\leq\infty$ et $n-k-q+1\leq r\leq n-k$, on ait $\overline{\partial}_b\widetilde{T}_r f=f$ dans Ω et que les estimations suivantes soient satisfaites :*

(1) $\|\widetilde{T}_r f\|_{L^{\frac{2n+2}{2n+1}-\epsilon}}\leq C\|f\|_{L^1}$, *pour tout* $\epsilon>0$ *assez petit.*

(2) $\|\widetilde{T}_r f\|_{L^{p'}}\leq C\|f\|_{L^p}$, *où* $\frac{1}{p'}=\frac{1}{p}-\frac{1}{2n+2}$ *et* $1<p<2n+2$.

(3) $\|\widetilde{T}_r f\|_{L^{p'}}\leq C\|f\|_{L^p}$, *où* $p=2n+2$ *et* $p<p'<\infty$.

(4) $\|\widetilde{T}_r f\|_{\mathcal{C}^{\alpha-\epsilon}}\leq C\|f\|_{L^p}$, *où* $2n+2<p<\infty$, $\alpha=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{p}$ *et* $\epsilon>0$.

(5) $\|\widetilde{T}_r f\|_{\mathcal{C}^{\frac{1}{2}-\epsilon}}\leq C\|f\|_{L^\infty}$, *pour tout* $\epsilon>0$.

Notons que contrairement au cas hölderien, pour les estimations L^p, le gain de régularité au bord n'est plus arbitrairement proche du gain de régularité à l'intérieur. La régularité intérieure est donnée par des opérateurs de type faible $\frac{2n}{2n-1}$ (cf Th. 3.3), alors que la régularité au bord est donnée par des opérateurs de type faible $\frac{2n+2}{2n+1}$. Ce phénomène est probablement lié au fait que la notion de trace est mal définie dans les espaces L^p.

Corollaire 4.3. *Sous les hypothèses du Théorème 4.2, l'image du $\overline{\partial}_b$ est fermée dans l'espace $L^p_{(n,r)}(\Omega)$ pour $1\leq p\leq\infty$ et $n-k-q+1\leq r\leq n-k$.*

Les estimations L^2 impliquent le théorème de décomposition de Hodge pour le $\overline{\partial}_b$ et l'existence des opérateurs $\overline{\partial}_b$-Neumann.

Corollaire 4.4. *Sous les hypothèses du Théorème 4.2, on a la décomposition de Hodge forte :*

pour $n-k-q+1<r<n-k$, il existe un opérateur linéaire $N_b : L^2_{(n,r)}(\Omega)\to L^2_{(n,r)}(\Omega)$ tel que

(1) N_b est borné et $\mathrm{Im}(N_b)\subset Dom(\square_b)$.

(2) Pour tout $f\in L^2_{(n,r)}(\Omega)$, on a

$$f=\overline{\partial}_b\overline{\partial}_b^* N_b f\oplus\overline{\partial}_b^*\overline{\partial}_b N_b f.$$

(3) Si $f \in L^2_{(n,r)}(\Omega)$ *with* $\overline{\partial}_b f = 0$*, alors* $f = \overline{\partial}_b \overline{\partial}_b^* N_b f$*. La solution* $u = \overline{\partial}_b^* N_b f$ *est appelée la solution canonique, i.e. c'est l'unique solution orthogonale à* $\mathrm{Ker}(\overline{\partial}_b)$*.*

Si M est une hypersurface strictement pseudoconvexe, la possibilité de résoudre l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle sur un domaine Ω a été étudiée dans [13]. Une condition nécessaire de résolubilité sur Ω est que le bord de Ω soit contenu dans une hypersurface Levi-plate.

Si z_0 est un point fixé de M, il possède un système fondamental de voisinages dont le bord est contenu dans une hypersurface Levi-plate. En effet, après un changement de variable quadratique, on peut supposer que $z_0 = 0$ et que M possède une fonction définissante ρ au voisinage de l'origine telle que

$$\rho(z) = -\mathrm{Im} z_n + \sum_{j,k=1}^{n} A_{jk} z_j \overline{z}_k + O(|z|^3),$$

où (A_{jk}) est une matrice hermirienne définie positive. Pour $\delta > 0$ suffisamment petit, la famille

$$\Omega_\delta = \{z \in M \mid \mathrm{Im}\ z_n < \delta\}$$

définit un système fondamental de voisinages de l'origine dont le bord est contenu dans une hypersurface Levi-plate. Dans [19], M.C. Shaw construit des noyaux adaptés aux domaines Ω_δ à l'aide du formalisme de Harvey et Polking (cf. 3.1) et prouve une formule d'homotopie en degré r, $1 \leq r \leq n-3$. Avec la même modification du dénominateur de la section de Leray liée au bord de Ω_δ que dans le cas q-concave, elle obtient des estimations L^p.

Théorème 4.5. *Soit* M *une hypersurface strictement pseudoconvexe de* $\mathbb{C}^n$ *et* z_0 *un point de* M*. Il existe un système fondamental de voisinages* Ω_δ *de* z_0 *et des opérateurs intégraux* T_r^δ*,* $1 \leq r \leq n-3$*, tels que pour toute* $f \in L^p_{(n,r)}(\Omega_\delta)$*,* $1 \leq r \leq n-2$ *et* $1 < p < \infty$ *,* $\overline{\partial}_b$*-fermée dans* Ω_δ*, on ait* $\overline{\partial}_b T_r^\delta f = f$ *et*

$$\|T_r^\delta f\|_{L^p_{(n,r)}(\Omega_\delta)} \leq C \|f\|_{L^p_{(n,r-1)}(\Omega_\delta)},$$

où C *ne dépend que de* p *et de* δ*.*

Remarquons que, dans le cas des variétés q-concaves, il y a un gain de régularité dans les estimations L^p (Th. 4.2) car le bord des domaines considérés est contenu dans des hypersurfaces strictement pseudoconvexes, ce n'est plus le cas ici car le bord des domaines considérés est cette fois contenu dans des hypersurfaces Levi-plates.

Références

[1] R. A. Airapetjan et G. M. Henkin. Integral representation of differential forms on Cauchy-Riemann manifolds and the theory of CR function. *Russian Math.Survey*, 39 :41–118, 1984.

[2] M. Y. Barkatou. *Formules locales de type Bochner-Martinelli-Koppelman sur des variétés CR, applications.* Thèse, Grenoble, 1994.

[3] M. Y. Barkatou. Régularité hölderienne du $\overline{\partial}_b$ sur les hypersurfaces 1-convexes-concaves. *Math. Zeit.*, 221 :549–572, 1996.

[4] M. Y. Barkatou et C. Laurent-Thiébaut. Estimations optimales pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel. *Michigan Math. Journal*, 54 :545–586, 2006.

[5] A. Boggess. *CR manifolds and the tangential Cauchy-Riemann Complex.* CRC Press, Boca Raton, Florida, 1991.

[6] A. Boggess et M.-C. Shaw. A kernel approach to local solvability of the tangential Cauchy-Riemann equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 289 :643–659, 1985.

[7] B. Fischer. Kernels of Martinelli-Bochner type on hypersurfaces. *Math. Zeit.*, 223 :155–183, 1996.

[8] B. Fischer et J.Leiterer. A local Martinelli-Bochner formula on hypersurfaces. *Math. Zeit.*, 214 :659–681, 1993.

[9] R. Harvey et J. Polking. Fundamental solutions in complex analysis, Part I and II. *Duke Math. J.*, 46 :253–300 and 301–340, 1979.

[10] G. M. Henkin. The Hans Lewy equation and analysis on pseudoconvex manifolds. *Math. USSR Sbornik*, 31 :59–130, 1977.

[11] G. M. Henkin. Solution des équations de Cauchy-Riemann tangentielles sur des variétés Cauchy-Riemann q-concaves. *Comptes Rendus Acad. Sciences*, 293 :27–30, 1981.

[12] G. M. Henkin et J. Leiterer. *Andreotti-Grauert theory by integral formulas*, volume 74 of *Progress in Math.* Birkhaüser, 1988.

[13] C. Laurent-Thiébaut. Sur l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle dans une calotte strictement pseudoconvexe. *Int. Journal of Math.*, 16 :1063–1079, 2005.

[14] C. Laurent-Thiébaut et J. Leiterer. On Polyakov's notion of regular q-concave CR manifolds. *Math. Zeitschrift*, 253 :235–249, 2006.

[15] C. Laurent-Thiébaut et M.C. Shaw. Boundary hölder and L^p estimates for local solutions of the tangential Cauchy-Riemann equation. *Trans. A.M.S.*, 124 :93–106, 2000.

[16] R. M. Range et Y. T. Siu. Uniform estimates for the $\overline{\partial}$ on domains with piecewise smooth strictly pseudoconvex boundaries. *Math. Ann.*, 206 :325–354, 1974.

[17] A. V. Romanov. A formula and estimates for the solution of the tangential Cauchy-Riemann equation. *Math. USSR Sbornik*, 28 :49–71, 1976.

[18] S. Sambou et B. Touré. Formule d'homotopie pour un domaine à bord (q+k)-concave d'une variété CR générique et q-concave. Applications. *Ann. Polon. Math.*, 91 :43–55, 2007.

[19] M.-C. Shaw. L^p estimates for local solutions of $\overline{\partial}_b$ on strongly pseudoconvex CR manifolds. *Math. Ann.*, 288 :35–62, 1990.

[20] M.-C. Shaw. Integral representations for $\overline{\partial}_b$ in CR manifolds. In *Geometric Complex Analysis, edited by Junjiro Noguchi and al.*, World Scientific Publishing Co., pages 535–549, 1996.

[21] M.-C. Shaw. Homotopy formulas for $\overline{\partial}_b$ in CR manifolds with mixed levi signatures. *Math. Zeit.*, 224 :113–135, 1997.

[22] H. Skoda. Valeurs au bord pour les solutions de l'opérateur d et caractérisation des zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna. *Bul. SMF*, 104 :225–299, 1976.

Université de Grenoble
Institut Fourier
UMR 5582 CNRS/UJF
BP 74
38402 St Martin d'Hères Cedex
France
Christine.Laurent@ujf-grenoble.fr