§1. Hilberträume: Grundlagen

(1) (L) $$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} x_i = b_j \qquad j = 1, 2, \dots$$

die Summen sind konvergent zu wählen. Verschiedene Präzisierungen möglich. Wir wählen hier den Hilbertraum

$$l_2 = \{ (x_i)_{i=1,2,\dots}, \; x_i \in \mathbb{K}, \; \sum |x_i|^2 < \infty \}$$

Def 1. l_2 Hilbertscher Folgenraum

Offenbar VR über $\mathbb{K}$. Nun sei (L) gegeben. Verlange

1) $(b_j)_{j=1,2,\dots} \in l_2$

2) $A = (a_{ij})$ soll durch

$$x \mapsto Ax = \sum a_{ij} x_j$$

eine (offenbar lineare) Abb $l_2 \to l_2$ definieren.

Untersuche (L), d.h. suche Lösungen in l_2.
A muss speziell zu wählen sein.

② Def 2 $x, y \in l_2$ sei

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$$ Skalarprodukt

$$\| x \|^2 = \sum |x_i|^2 = \langle x, x \rangle$$ Norm

Wegen $2|x_i \overline{y_i}| \leq |x_i|^2 + |y_i|^2$
konvergiert die Summe

Satz 1 l_2 $\mathbb{K}$-VR, $\langle\ ,\ \rangle$ Skalarprodukt,
$\| \cdot \|$ Norm, l_2 vollständig

Bemerkung $\mathbb{K}^n$ V_n n $\mathbb{K}$ VR
$\langle x, y \rangle = \sum x_i \overline{y_i}$ $\langle\ ,\ \rangle$ Skalarprod
endlich dim. Beispiele
l_2 Verallgemeinerung auf ∞-e Dim.

③ Def 2 Prähilbertraum $\mathbb{K}$-VR V mit
positiv definitem hermitischem Skalar-
produkt $\langle\ ,\ \rangle$:

0) $\langle x, y \rangle \in \mathbb{K}$
1) linear in x
2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
3) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $= 0$ für $x = 0$.

z. B. $\mathbb{K}^n$, $\langle\ ,\ \rangle$

<u>Def</u> 3 $\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$

<u>Satz 1'</u> l_2 Hilbertraum

<u>Satz 2</u> (Schwarzsche Ungleichung)

$$|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|$$
$$= \quad \text{d.u.n.d. } x,y \text{ lin abh.}$$

<u>Beweis</u> O.E. $y \neq 0$. $y_0 \overset{\text{def}}{=} \frac{y}{\|y\|}$

$\alpha = \langle x, y_0\rangle$

$$0 \le \langle x-\alpha y_0,\, x-\alpha y_0\rangle$$
$$= \|x\|^2 + |\langle x,y_0\rangle|^2 - \alpha\langle y_0,x\rangle - \bar{\alpha}\langle x,y_0\rangle$$
$$= \|x\|^2 - |\langle x,y_0\rangle|^2$$

$$\|y\|^2|\langle x,y_0\rangle|^2 = |\langle x,y\rangle|^2 \le \|y\|^2\|x\|^2$$

Sind x,y l. unabh $\rightsquigarrow$ Ungleichg strikt
Sind x,y l. abhängig, etwa $y = \lambda x$,
so $|\langle x,y\rangle|^2 = |\lambda|^2\|x\|^2 = \|\lambda x\|^2\|x\|^2 = \|x\|^2$ –

<u>Folgerung</u> (Dreiecksungleichung)
$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$$

<u>Beweis</u> $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle + \|y\|^2$
$$\le \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2$$
$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

<u>Folgerung</u> $\|\cdot\|$ ist eine Norm, i.e.

$\|x\| \geq 0$, $= 0$ nur für $x = 0$

$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\rightsquigarrow$ Metrik $d(x,y) \overset{\text{def}}{=} \|x-y\|$, konv. Folgen, Cauchy-Folge ....

<u>Def</u> 3. 1) $V, \|\cdot\|$ vollständig $\Leftrightarrow$ jede Cauchyfolge konvergiert

2) Ein Hilbertraum ist ein vollständiger Prähilbertraum

Beispiel: $\mathbb{K}^n, \langle \, , \, \rangle$

<u>Bem</u>. $V, \langle \, , \, \rangle$ prähilbert. Dann

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x, y &\longrightarrow \langle x, y \rangle \end{aligned} \quad \text{stetig}$$

(4) Beweis von Satz 1: z.z. „vollständig" und VR

0) $x \in \ell_2$, $= (x_i)_{i=1,2,\ldots}$

Setze

$$x(n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$$

Dann $\|x(n)\| \leq \|x\|$

$\|x(n)\| \longrightarrow \|x\|$

$\|x - x(n)\| \longrightarrow 0$

1) $x, y \in l_2 \overset{?}{\Rightarrow} x+y \in l_2$

$\|x(n)+y(n)\| \leq \|x(n)\| + \|y(n)\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\Big\downarrow n \to \infty$

$\|x+y\|$ existiert $\leq \|x\| + \|y\|$

2) x^ν Cauchy in l_2 $\quad x^\nu = (x_i^\nu)_{i=1 \dots n}$

Dann x_i^ν CF in $\mathbb{K}$, $\to x_i$

Setze

$x = (x_i)_{i=1 \dots n}$

$\alpha)$ $x \in l^2$ $\quad$ $\beta)$ $x^\nu \xrightarrow[l^2]{} x$

Zu $\alpha)$ x^ν beschränkt, $\|x^\nu\| \leq R$

$\Rightarrow \|x^\nu(n)\| \leq R$

$\Rightarrow \|x(n)\| \leq R \quad \Rightarrow \|x\| \leq R$.

d.h. $x \in l_2$

Zu β. $\varepsilon > 0$, j_0 so groß

daß $\|x^\nu - x^k\| < \varepsilon$ für $\nu, k \geq j_0$.

$$\begin{aligned}\|x - x^j\| &\leq \|x - x(n)\| + \|x(n) - x^j(n)\| \\ &\quad + \|x^j(n) - x^k(n)\| + \|x^k(n) - x^k\| \\ &\quad + \|x^k - x^j\| \\ &= \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} + \mathrm{V}\end{aligned}$$

$k \geq j_0$ fest. n so groß, daß $\mathrm{I}, \mathrm{III} < \varepsilon$

$j \geq j_0 \Rightarrow \mathrm{V}, \mathrm{III} < \varepsilon$

$j_1 \geq j_0$ so daß $\mathrm{II} < \varepsilon$

$\Rightarrow \|x - x^j\| \leq 5\varepsilon$ für alle $j \geq j_1$.

⑤ Erinnerung. $\mathbb{Q}$ nicht vollständig bez. $|\cdot|$. Vervollständigung ist $\mathbb{R}$!

$\mathcal{C}\mathbb{Q}$ Ring der Cauchyfolgen

$\mathcal{N}\mathbb{Q}$ Ideal der Nullfolgen

$$\mathbb{R} = \mathcal{C}\mathbb{Q}/\mathcal{N}\mathbb{Q}.$$

(Leider) oft Gegenstand des Schulunterrichts: $\mathbb{R}$ als Komplettierung von $\mathbb{Q}$.

Dasselbe Verfahren liefert zu jedem Prähilbertraum als Komplettierung einen Hilbertraum

(6) Satz 3. Q Quader in $\mathbb{R}^n$.
$\mathcal{C}^0(Q) = \{ f : Q \to \mathbb{C} \text{ stetig} \}$
Mit

$$\langle f, g \rangle = \int_Q f(x) \overline{g(x)}\, dx$$

wird $\mathcal{C}^0(Q)$ ein Prä-Hilbertraum

Def 4. Die Komplettierung von $\mathcal{C}^0(Q)$ heißt Hilbertraum der quadratintegrierbaren Fktn auf Q,

$$L^2(Q).$$

Interpretation von $L^2(Q)$. (Wesentlich auch der nächste Paragraph.)
Ergebnis:

$f : Q \to \mathbb{C}$ meßbar, mit $\int |f(x)|^2 dx < \infty$
„quadratintegrierbar"

$f \sim g \iff f - g$ ist fast überall 0
f.ü.

Satz 4. $L^2(Q)$ Raum der quadratintegrierbaren Fktnen modulo $\sim$, d.h. Klassen quadratintegrabler Fktnen, mit

$$\langle f, g \rangle = \int_Q f(x) \overline{g(x)}\, dx$$