§ 2. Integration

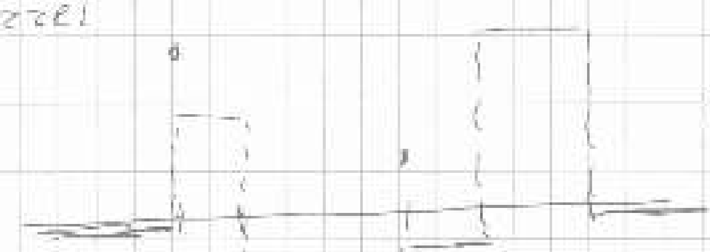
① 1 Vorarbeiten (zur Vereinfachung der Rechnungen)

Def 1 $f: M \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ nach oben halbstetig in x_0
$\Leftrightarrow$ Ist $f(x_0) < r$, so existiert eine Umgebung
$U = U(x_0)$ mit $f(x) < r$ auf U
f nach unten halbstetig in x_0 $M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
$\Leftrightarrow$ $f(x_0) > r$ dann $f(x) > r$ in $U = U(x_0)$
passend

Bemerkung. stetig $\equiv$ n.o. und n.u. halbstetig

Def 2. $t: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion $\Leftrightarrow$
1) Es gibt ein endliches Intervall I mit $t \equiv 0$ außerhalb I
2) Es gibt eine Zerlegung von $\mathbb{R}$ in endlich viele Teilintervalle:
$-\infty < a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_m < +\infty$
so daß $t \equiv$ const auf jedem offenen Intervall (a_j, a_{j+1}) (und $\equiv 0$ auf $(-\infty, a_0)$ bzw $(a_m, +\infty)$)

Skizze:



Def 3 $\sum_j t(I_j)\, l(I_j)$ Riemannsche Summe von t.

$$l(I_j) = a_{j+1} - a_j$$

Bemerkung 1) Die Treppenfkt bilden einen VR $\mathcal{T}$ über $\mathbb{R}$, $\Sigma : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ lineare Abbildung.

2) t Treppenfunktion. Setze

$$\overline{t} = \begin{cases} t(I_j) & \text{auf } I \\ \max\left(t(I_j), t(I_{j-1})\right) & \text{in } a_j \end{cases}$$

$$\underline{t} = \begin{cases} \dots \\ \min \end{cases}$$

„geglättete Treppenfkt" $\overline{t}$ n.o. hst.
$\underline{t}$ n.u. hst.

(2) 1. Schritt f n.u. hst ≥ 0 außerhalb I

Dann

$$\int f(x)\,dx = \sup\left\{\Sigma t : \overline{t} \leq f\right\}$$

f n.o. hst ≤ 0 außerhalb I

Dann

$$\int f(x)\,dx = \inf\left\{\Sigma(t) : \underline{t} \geq f\right\}$$

2. Schritt Notation: Ist t Treppenfunktion,

$\Rightarrow$ $\bar{t}, \underline{t}$ integrierbar, $\Sigma t = \int \underline{t}\,dx = \int \bar{t}\,dx$

3. Schritt

Def. 4 $f : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ integrierbar $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $h \le f \le g$, h n.o.hst, g n.u.hst, $h \le 0$ außerhalb I, $g \ge 0$ außerhalb I, integrierbar, mit

$$\int g\,dx - \int h\,dx < \varepsilon .$$

Nun sei f integrierbar, $\varepsilon_j \to 0$, $\varepsilon_j > 0$,

$$h_1 \le h_2 \le \dots \le f \le \dots \le g_2 \le g_1$$

mit $\int g_j\,dx - \int h_j\,dx \le \varepsilon_j$.

$\Rightarrow$ $\lim \int h_j\,dx = A = \lim \int g_j\,dx$

Def 5. Obiger Limes A heißt Integral von f

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = A$$

③ mehrere Veränderliche: starte mit Treppenfktn in $\mathbb{R}^n$, sonst geht genau so vor! Im folgenden immer der n-dimensionale Fall.

④ Def 6. $M \subset \mathbb{R}^n$, $f : M \to \bar{\mathbb{R}}$. f heißt

integrierbar über M $\Leftrightarrow$ $\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in M \\ 0 & - \; x \notin M \end{cases}$
ist integrierbar:

$$\int_M f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\,dx$$

Def 7 M meßbar $\Leftrightarrow$ $\exists$ positive integrierbare Fkt auf M
M endl. meßbar $\Leftrightarrow$ 1 ist über M integrierbar

endl. meßbar: $\chi_M = \hat{1}_M = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ integrierbar

Bemerkung 1) Stetige Fktn sind über kompakte Mengen integrierbar $\Rightarrow$ kompakte Menge sind endlich meßbar (folgt leicht aus den Definitionen!)

2) Für Treppenfktn u. halbstetige Fktn 2 Integralbegriffe: sie liefern dasselbe, also

$$\int t(x)dx = \Sigma(t) = \Sigma\, \underline{t} = \Sigma\, \overline{t}$$

Def 4 + 1. Schritt für hst. Fktn: dasselbe Ergebnis

Def 8 1) M endlich meßbar. Dann $I(M) = \int \hat{1}_M\,dx$.
2) M Nullmenge $\Leftrightarrow$ $I(M) = 0$.
3) $f = g$ fast überall $\Leftrightarrow$ $f - g \neq 0$ nur auf einer Nullmenge

Bemerkung: $f = g$ f.ü. $\Rightarrow$ $\int f = \int g$

Klassisch: endliche Mengen sind Nullmengen
Nichttrivial: Hyperebenen $\subset \mathbb{R}^n$ sind Nullmengen, ebenso glatte Flächen, ebenso abzählbare Mengen

Satz 1 f integrierbar $\Rightarrow$ f f.ü. endlich

Def.: f meßbar $\Leftrightarrow$ 1) f f.ü. endlich
2) f f.ü. Limes von Treppenfunktionen

Satz 2. 1) M meßbar $\Leftrightarrow$ χ_M meßbar
2) f meßbar und $|f| \leq F$, F integrierbar $\Rightarrow$ f integrierbar
3) $f_j \to f$ f.ü. Alle f_j meßbar und f f.ü. endlich. Dann f meßbar.

⑤ Zentrale Sätze der Integralrechnung und Konvergenzsätze

Theorem 3 $f_j \uparrow f$, alle f_j integrabel, $\int f_j\,dx \leq A$. Dann: f integrierbar

$$\int f(x)\,dx = \lim \int f_j(x)\,dx$$

(Satz über monotone Konvergenz)

Theorem 4 (Lebesguesches Konvergenzsatz)

$f_j \xrightarrow[\text{f.ü.}]{} f$, f_j integrierbar. Es gebe eine integrable Fkt F mit

$$|f_j| \leq F \quad \text{f.ü.}$$

Dann ist $f = \lim f_j$ integrierbar, mit

$$\int f(x)\,dx = \lim \int f_j(x)\,dx$$

Theorem 5 (Fubini) f integrierbar über $\underbrace{\mathbb{R}^n}_{x} \times \underbrace{\mathbb{R}^m}_{y}$. Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dy \cdot dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Ist $f \geq 0$ und meßbar, dann folgt aus der Existenz des iterierten Integrals die Integrierbarkeit.

(6) Theorem 6. $f_j \in L^2$ Cauchyfolge. Dann ex Teilfolge $f_{j_k} \xrightarrow[\text{f.ü.}]{} f$; $f \in L^2$ und $f = \lim f_j$ in L^2

Beweis

Hilfssatz. $f_j \to f$ f.ü., $f_j \in L^2$

Es gebe $F \in L^2$ mit $|f_j| \leq F$. Dann ist $f \in L^2$ und $f_j \xrightarrow[L^2]{} f$.

Beweis 1) f meßbar, da f.ü. endlich.

2) $|f|^2 \leq F^2 \Rightarrow f \in L^2$

3) $|f_j - f|^2 \leq (|f_j| + |f|)^2 \leq 4F^2$

dominierte Konvergenz

$$\int |f_j - f|^2 dx \to 0$$

Beweis des Theorems.

Wähle Indexfolge $j_1 < j_2 < \ldots$ mit

$$\| f_{j_\nu} - f_{j_{\nu+1}} \| \leq 2^{-\nu}.$$

Zeige: die f_{j_ν} konvergieren f.ü.

Sind die Partialsummen von

$$f_{j_1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (f_{j_{\nu+1}} - f_{j_\nu})$$

$$\sum \| f_{j_{\nu+1}} - f_{j_\nu} \| \stackrel{\text{def}}{=} M < \infty$$

Setze

$$g_\mu = \sum^{\mu} | f_{j_{\nu+1}} - f_{j_\nu} | \in L^2$$

$$\int g_\mu^2 dx \leq \sum \| f_{j_{\nu+1}} - f_{j_\nu} \|^2 \leq M^2$$

$$g_\mu^2 \uparrow g^2 \text{ mit } g = \sum^{\infty} | f_{j_{\nu+1}} - f_{j_\nu} | = \lim g_\mu$$

(mon. Konvergenz) $\Rightarrow$ g^2 integrierbar $\int g^2 dx < \infty$.

Damit: g f.ü. endlich. d.h. für fast alle x konvergiert

$$\sum |f_{j_{\nu+1}} - f_{j_\nu}|(x),$$

also auch $\sum (f_{j_{\nu+1}} - f_{j_\nu})(x)$,

~~also f_{j_ν}~~ | Ferner $|f_{j_\nu}| \leq g + |f_{j_1}|$ |

~~Damit nach Hs: $f_{j_\nu} \xrightarrow[L^2]{} f \in L^2$.~~

Nenne den Limes f. Also

$$f_{j_\nu} \to f \quad \text{f.ü.}$$

Nun: $|f_{j_\nu}| \leq g + |f_{j_1}| \in L^2$. Nach Hs: $f_{j_\nu} \xrightarrow[L^2]{} f$. Da f_{j_ν} Teilfolge der L^2-CF f_j, gilt $\|f - f_j\| \to 0$.

Zusatz. Für den L^2-Raum komplexwertiger Fktn gilt dasselbe: zerlege in Real- u. Imaginärteil.