Mathematik für Physiker III
Universität Bonn, WS 2013/14

Prof. Dr. Jens Franke
Jan Büthe

Übungsblatt 10

Abgabe am 15.01.2014
in der Vorlesung

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Für eine Lebesgueintegrierbare Funktion f definieren wir die Fourier Transformation durch

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx}\, dx$$

Berechnen Sie die Fourier Transformierte von

$$f(t) = \cosh\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}t\right)^{-1}$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Sei

$$\omega_n = \int_{\partial B_1(0)} 1\, dS$$

die Oberfläche und σ_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel. Zeigen Sie, dass

$$\sigma_n = \frac{\omega_n}{n}$$

gilt.
Dabei, wie auch im Weiteren, dürfen Sie verwenden, dass für eine Lebesgueintegrierbare, rotationsinvariante Funktion f die Transformationsformel

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \omega_n \int_0^{\infty} r^{n-1} g(r)\, dr$$

gilt, wobei g durch $f(x) = g(|x|)$ definiert ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass

$$\sigma_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

gilt.
Berechnen Sie dazu das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\,dx$$

auf zweierlei Weisen: Einmal unter Verwendung des Satzes von Fubini und einmal mit der obigen Transformation für rotationsinvariante Funktionen.

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \omega_n = 0$$

gilt und finden Sie das kleinste n mit $\sigma_n < 10^{-2014}$.
Nutzen Sie dazu z.B. die in $x > 0$ gültige Ungleichung

$$\Gamma(x) \geq \int_x^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

und schätzen Sie das Integral geeignet von unten ab.

***Aufgabe** (5 Punkte)**.** Bestimmen Sie den (exakten) Radius einer Kugel vom Volumen 7 im $\mathbb{R}^{11}$.

Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Start ins neue Jahr $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$!