Mathematik für Physiker III
Universität Bonn, Ws 2013/14

Prof. Dr. Jens Franke
Jan Büthe

Übungsblatt 12

Abgabe am 29.1.2014
in der Vorlesung

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Sei $p \le q$ und sei $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > 1$. Drücken Sie

$$t^{-s} \int_0^t {}_p\mathrm{F}_q(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; \tau) \tau^{s-1} \, d\tau$$

als hypergeometrische Funktion aus. Der Spezialfall ${}_0\mathrm{F}_0(;;\tau) = e^\tau$ wurde bereits in der Voresung bewiesen.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Beweisen Sie für $x > 0$ die Gleichung

$$\int_x^{x+1} \log \Gamma(t) \, dt = x \log x - x + \frac{1}{2} \log 2\pi.$$

Hinweis: Zeigen Sie mithilfe der Funktionalgleichung für die Gammafunkion, dass die Differenz von linker und rechter Seite 1-periodisch ist und wenden Sie dann die Stirlingsche Formel an, um ihr verschwinden zu zeigen.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Für $z \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ sei

$$\mathrm{L}_2(z) = -\int_0^z \frac{\log(1-\xi)}{\xi} \, d\xi.$$

Zeigen Sie, dass für $|z| < 1$

$$\mathrm{L}_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

gilt und drücken Sie L_2 durch eine hypergeometrische Funktion aus.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius r. Drücken Sie für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ und $|z| < r$ die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{4n+k} z^{4n+k}$$

als Linearkombination der Funktionen $(f(i^m z))_{m=0}^3$ aus. Drücken Sie sodann eine Stammfunktion der Funktion $\arctan e^z$ in $\Re(z) < 0$ durch den Dilogarithmus L_2 aus.

Hinweis: Überlegen Sie sich für die erste Aufgabe, dass für ganzzahliges k

$$\sum_{l=0}^{3} i^{kl} = \begin{cases} 4 & k \in 4\mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. Der zweite Teil der Aufgabe kann dann mithilfe des ersten aus der Arkustangensreihe

$$\arctan(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}$$

gefolgert werden.