

Übungsblatt 13

Abgabe am 5.2.2014
in der Vorlesung

Dieses Übungsblatt besteht komplett aus Zusatzaufgaben, die sich über den Stoff des gesamten Semesters erstrecken, und trägt nicht zur Gesamtpunktzahl bei. Sämtliche auf diesem Blatt erreichte Punkte sind somit Bonuspunkte.

Aufgabe 1 (5 Punkte). Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und es gelte

$$f'(z) = f(z).$$

Zeigen Sie, dass $f(z) = f(0) \exp(z)$ gilt. Hinweis: Entwickeln Sie f an geeigneter Stelle in eine Potenzreihe.

Aufgabe 2 (5 Punkte). Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh(t)}{\sinh(t)^2 + 2} dt$$

mithilfe des Residuensatzes. Hinweis: Verschieben Sie den Integrationsweg ein Stück weit in die obere oder untere Halbebene.

Aufgabe 3 (5 Punkte). Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^4 + 2t^2 + 1} dt$$

mithilfe des Residuensatzes.

Aufgabe 4 (5 Punkte). Sei $p(z)$ ein komplexes Polynom, $w \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{|w-\xi|=r} \overline{p(\xi)} d\xi = 2\pi i r^2 \overline{p'(w)}$$

gilt, wobei der Kreis mathematisch positiv durchlaufen wird.