Mathematik für Physiker III
Universität Bonn, Ws 2013/14

Prof. Dr. Jens Franke
Jan Büthe

Übungsblatt 2

Abgabe am 6.11.2013
in der Vorlesung

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Geben Sie alle Punkte an, in denen die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind:

$$f(x+iy) = xy - 2ixy$$
$$f(x+iy) = -6(\cos(x) + i\sin(x)) + (2-2i)y^3 + 15(y^2 + 2y)$$
$$f(x+iy) = \sin(x+y)^2 + i\cos(x+y)^2$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Sei $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $u, v \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ganz. Zeigen Sie, dass jede weitere Funktion $\tilde{v} \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, für welche $\tilde{f}(x+iy) = u(x,y) + i\tilde{v}(x,y)$ ganz ist, sich nur um eine reelle Konstante von v unterscheiden kann, d.h. es gilt $v(x,y) - \tilde{v}(x,y) = c$ für ein geeignetes $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Sei $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und Sei $f\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ durch $f(z) = 1/z$ gegeben. Sei $r > 0$ und sei

$$K_r(z) = \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi - z| = r\}$$

der Kreis mit Radius r um z. Zeigen Sie,

1. dass $f(K_r(z)) = K_{\tilde{r}}(\tilde{z})$, mit

$$\tilde{r} = \frac{r}{\left||z|^2 - r^2\right|} \quad \text{und} \quad \tilde{z}\frac{\overline{z}}{|z|^2 - r^2}$$

   für $r \neq |z|$ gilt.

2. dass $f(K_r(z) \setminus \{0\})$ für $r = |z|$ aus der Geraden durch $(2z)^{-1}$ besteht, deren Abstand zum Nullpunkt $|2z|^{-1}$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph mit nichtverschwindender Ableitung im Punkt w. Seien $\gamma_1, \gamma_2\colon [0,2] \to U$ stetig differenzierbare Kurven und es gelte $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = w$. Zeigen Sie, dass der Winkel und die Orientierung der Tangenten von γ_1 und γ_2 im Schnittpunkt w mit dem Winkel und der Orientierung der Tangenten von $f \circ \gamma_1$ und $f \circ \gamma_2$ im Schnittpunkt $f(w)$ übereinstimmen.