Mathematik für Physiker III
Universität Bonn, Ws 2013/14

Prof. Dr. Jens Franke
Jan Büthe

Übungsblatt 5

Abgabe am 27.11.2013
in der Vorlesung

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend mit der Eigenschaft, dass für alle $z \in U$ auch $\overline{z} \in U$ gilt. Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. Es gilt $f(\mathbb{R} \cap U) \subset \mathbb{R}$.
2. Es gilt $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ für alle $z \in U$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Sei f eine auf $U = \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) > 0\}$ holomorphe und auf $\{z \in \mathbb{C} | \Im(z) \geq 0\}$ beschränkte, stetige und nicht-konstante Funktion die $|f(t)| = 1$ für $t \in \mathbb{R}$ erfülle. Zeigen Sie, dass eine Folge $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ in U existiert, sodass

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$$

gilt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Sei f eine auf einer Umgebung von 0 holomorphe Funktion die dort

$$f(z) + f''(z) = 0$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass sich f zu einer ganzen Funktion fortsetzen lässt und drücken Sie alle derartigen Funktionen durch spezielle Funktionen aus.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Sei $U = \{z \in \mathbb{C} \mid iz \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| < 1\}$. Zeigen Sie, dass das Kurvenintegral

$$f(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{\xi^2 + 1}$$

für $z \in U$ nicht von der Wahl des Weges in U abhängt. Drücken Sie die Funktion f dazu durch den Hauptzweig des Logarithmus aus.