Prof. Dr. Jens Franke
Jan Büthe

Übungsblatt 7

Abgabe am 11.12.2013
in der Vorlesung

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und seien g und f auf $U \setminus \{z\}$ holomorphe Funktionen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

1. Es gilt
$$\mathrm{Res}_z(\lambda f + \mu g) = \lambda \,\mathrm{Res}_z(f) + \mu \,\mathrm{Res}_z(g).$$

2. Ist g holomorph in U und hat f bei z einen einfachen Pol, so gilt
$$\mathrm{Res}_z(fg) = g(z)\,\mathrm{Res}_z(f).$$

3. Ist g holomorph in ganz U und hat f in z eine Nullstelle 1. Ordnung, so gilt
$$\mathrm{Res}_z\left(\frac{g}{f}\right) = \frac{g(z)}{f'(z)}.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Folgern Sie
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{e^t + e^{-t}} = \frac{\pi}{2}$$
aus dem Residuensatz.
Hinweis: Verschieben Sie den Integrationsweg so, dass der Integrand sein Vorzeichen wechselt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Gegeben Sei die in $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, 2\}$ holomorphe Funktion

$$f(z) = \frac{6}{z(z+1)(z-2)}.$$

Berechnen Sie die Laurentreihenentwicklung von f für die durch $0 < |z| < 1$, $1 < |z| < 2$ und $2 < |z| < \infty$ gegebenen Kreisscheiben mit Mittelpunkt 0.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei f auf U meromorph. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

1. Hat f im Punkt z eine Nullstelle n-ter Ordnung, so gilt

$$\operatorname{Res}_z \frac{f'}{f} = n.$$

2. Hat f im Punkt z eine Polstelle n-ter Ordnung, so gilt

$$\operatorname{Res}_z \frac{f'}{f} = -n.$$