Mathematik für Physiker III
Universität Bonn, WS 2013/14

Prof. Dr. Jens Franke
Jan Büthe

Testatreihe 3C

Testat 12(II). Man integriere das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = (1, 1, -1+y)$$

über das Dreieck mit den Ecken

$$\begin{aligned} P &= (1,-1,0) \\ Q &= (1,-2,0) \\ R &= (2,-2,-1) \end{aligned}$$

Das Dreieck soll so orientiert werden, dass sich Q von R aus gesehen links von P befindet.
Lösung: $-\frac{5}{6}$

Testat 13(II). Man berechne die Oberfläche der durch $(t, f(t)\cos(\phi), f(t)\sin(\phi))$ mit $0 \le t \le \infty$ und $0 \le \phi \le g(t)$ parametrisierten Fläche im $\mathbb{R}^3$, wobei f und g durch

$$\begin{aligned} f(t) &= 5 + 3 \cdot \cosh(\frac{t}{3}) \\ g(t) &= t \cdot \exp(-t) \end{aligned}$$

gegeben sind
Lösung: $\frac{12441}{800}$

Testat 1(III). Finden Sie jeweils die stärkste Aussage, die auf die nachfolgenden Funktionen f zutrifft.

A f ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

B f ist auf $\mathbb{C}$ bis auf eine diskrete Teilmenge holomorph.

C f ist auf einer dichten Teilmenge von $\mathbb{C}$ holomorph.

Dabei ist es auch möglich, dass keine der Aussagen zutrifft.

$$f(z) = \frac{\Im(z^2 e^{3z})}{i} + \frac{e^{2z}}{z^3}$$
$$f(z) = \log(|z|^2) + \cos(z) - 2i \arctan\left(\frac{\Re(z)}{\Im(z)}\right)$$
$$f(z) = \log(1 + z^3)$$

Lösung: x, C, C

Testat 2(III). Man bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{3n} \cdot z^n}{1 + n^{4n}}$$

Lösung: ∞

Testat 3(III). Man berechne das Kurvenintegral von

$$((3 - i) \cdot \Re(z) + (-7 - 3 \cdot i) \cdot \Im(z) - 4 + 3 \cdot i)\, dz$$

entlang folgender Kurve: Der Halbkreis mit Mittelpunkt 0 von 1 nach -1 über $-i$.
Lösung: $8 - 6 \cdot i + (-4 - 3 \cdot i) \cdot \pi$.

Testat 4(III) Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen an den angegebenen Stellen eine hebbare Singularität (H), eine nicht-isolierbare Singularität (N), eine wesentliche Singularität (W) oder eine Polstelle (P) haben.

$$\begin{array}{ll} \log(1 - \cos(z)) & z = 0 \\ \dfrac{e^{1/z} - 1}{z^2} & z = 0 \\ \dfrac{\sin(iz) + 1}{\cosh(z)} & z = i\dfrac{\pi}{2} \end{array}$$

Lösung: N,W,H

Testat 5(III). Berechnen Sie das Residuum der Funktion

$$\frac{4 - 5 \cdot \sin(4z) + \tan(4z)}{3 \cdot \exp(3z) - 3 \cdot \cos(z)}$$

an der Stelle 0.
Lösung: $\frac{4}{9}$.

Testat 6(III). Integrieren Sie

$$\frac{\exp(z^2)}{(z^4 + 2 \cdot z^3 + 6 \cdot z^2 + 18 \cdot z - 27)}\, dz$$

entlang der folgenden Kurve: Der Kreis mit Radius 4 und Mittelpunkt -1, mathemematisch positiv durchlaufen.
Lösung: $-\frac{e^{-9}\pi \cdot i}{45} + \frac{e \cdot \pi \cdot i}{20} - \frac{e^9 \cdot \pi \cdot i}{36}$.

Testat 7(III). Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$\frac{(z^4 - 4 \cdot z^3 + 3 \cdot z^2) \cdot (\exp(2 \cdot z) - 1)}{(z^4 + 8 \cdot z^3 + 18 \cdot z^2 - 27)}$$

im Nullpunkt.
Lösung: 3.

Testat 8(III). Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \frac{(2 \cdot t + 3) \cdot \sqrt{t}}{(t^4 + 13 \cdot t^3 + 59 \cdot t^2 + 107 \cdot t + 60)}\, dt.$$

Lösung: $\frac{79 \cdot \pi}{24} - \frac{3 \cdot \sqrt{3}\pi}{4} - \frac{7 \cdot \sqrt{5}\pi}{8}$.

Testat 9(III). Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \frac{(3 \cdot t - 2) \cdot \sqrt{t}}{(t^4 + 15 \cdot t^3 + 79 \cdot t^2 + 165 \cdot t + 100)}\, dt.$$

Lösung: $\frac{331 \cdot \sqrt{5}\pi}{80} - \frac{443 \cdot \pi}{48}$.