Mathematik für Physiker III | Prof. Dr. Jens Franke
Universität Bonn, WS 2013/14 | Jan Büthe

Testatreihe 3D

Testat 12(II). Man integriere das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = (1-x, 1, -1)$$

über das Dreieck mit den Ecken

$$\begin{aligned} P &= (0,-1,0) \\ Q &= (-1,-2,0) \\ R &= (-1,0,0) \end{aligned}$$

Das Dreieck soll so orientiert werden, dass sich R von P aus gesehen links von Q befindet.
Lösung: 1

Testat 13(II). Man berechne die Oberfläche der durch $(t, f(t)\cos(\phi), f(t)\sin(\phi))$ mit $0 \leq t \leq \infty$ und $0 \leq \phi \leq g(t)$ parametrisierten Fläche im $\mathbb{R}^3$, wobei f und g durch

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 + 2 \cdot \cosh(\frac{t}{2}) \\ g(t) &= t \cdot \exp(-2 \cdot t) \end{aligned}$$

gegeben sind
Lösung: $\frac{997}{900}$

Testat 1(III). Finden Sie jeweils die stärkste Aussage, die auf die nachfolgenden Funktionen f zutrifft.

A f ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

B f ist auf $\mathbb{C}$ bis auf eine diskrete Teilmenge holomorph.

C f ist auf einer dichten Teilmenge von $\mathbb{C}$ holomorph.

Dabei ist es auch möglich, dass keine der Aussagen zutrifft.

$$f(z) = \log(|z|) - \sin(z)^2 - i \arctan\Big(\frac{\Im(z)}{\Re(z)}\Big)$$
$$f(z) = \frac{1}{\cos(z) + \sin(z)^4 - 177i} + z\log(27)$$
$$f(z) = \exp(\frac{1}{z} + z) - \arctan(z^2)$$

Lösung: X, B, C

Testat 2(III). Man bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n} \cdot z^{n^2}}{e^{n^2} \cdot n^{2n}}$$

Lösung: e

Testat 3(III). Man berechne das Kurvenintegral von

$$((5+i) \cdot \Re(z) + (3+i) \cdot \Im(z) - 5 \cdot i)\, dz$$

entlang folgender Kurve: Der Viertelkreis mit Mittelpunkt 0 von 1 nach $-i$.
Lösung: $-8 + 6 \cdot i + (1-i) \cdot \pi$.

Testat 4(III) Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen an den angegebenen Stellen eine hebbare Singularität (H), eine nicht-isolierbare Singularität (N), eine wesentliche Singularität (W) oder eine Polstelle (P) haben.

$$\frac{e^z - e^{2z}}{z^3 - z} \qquad z = 0$$
$$\frac{z^2 + \frac{\pi^2}{4}}{\cosh(z)^2} \qquad z = \frac{\pi}{2}i$$
$$\frac{e^{2z} - 1 - 2\sin(z)}{z^2(1-\cos(z))} \qquad z = 0$$

Lösung: H, P, P

Testat 5(III). Berechnen Sie das Residuum der Funktion

$$\frac{-4 \cdot \tan(4z) + 4 + \cos(z) - 4 \cdot \sin(z)}{3 \cdot \tan(4z)}$$

an der Stelle 0.
Lösung: $\frac{5}{12}$.

Testat 6(III). Integrieren Sie

$$\frac{\exp(z^2)}{(z^4 + 6 \cdot z^3 + 11 \cdot z^2 + 6 \cdot z)}\, dz$$

entlang der folgenden Kurve: Der Kreis mit Radius 4 und Mittelpunkt -2, mathemematisch negativ durchlaufen.
Lösung: $e \cdot \pi \cdot i - e^4 \cdot \pi \cdot i - \frac{\pi \cdot i}{3} + \frac{e^9 \cdot \pi \cdot i}{3}$.

Testat 7(III). Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$\frac{(z^4 + 7 \cdot z^3 + 17 \cdot z^2 + 17 \cdot z + 6) \cdot (\sin(z) + \sqrt{3} \cdot \cos(z))}{(\sqrt{3} \cdot \sin(z) + \cos(z))}$$

im Nullpunkt.
Lösung: $\frac{\pi}{6}$.

Testat 8(III). Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \frac{(-3 \cdot t - 5) \cdot \sqrt{t}}{(t^4 + 11 \cdot t^3 + 41 \cdot t^2 + 61 \cdot t + 30)}\, dt.$$

Lösung: $\frac{\pi}{4} + \frac{5 \cdot \sqrt{5}\pi}{12} - \sqrt{3}\pi + \frac{\sqrt{2}\pi}{3}$.

Testat 9(III). Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \frac{(-2 \cdot t - 3) \cdot \sqrt{t}}{(t^4 + 14 \cdot t^3 + 68 \cdot t^2 + 130 \cdot t + 75)}\, dt.$$

Lösung: $-\frac{51\cdot\sqrt{5}\pi}{160}+\frac{3\cdot\sqrt{3}\pi}{8}+\frac{\pi}{32}$.