Mathematik für Physiker III
Universität Bonn, WS 2013/14

Prof. Dr. Jens Franke
Jan Büthe

Testatreihe 4A

Testat 12(II). Man integriere das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) = (-1, -1, -x)$$

über das Dreieck mit den Ecken

$$\begin{aligned} P &= (-1, 0, -1) \\ Q &= (0, 0, -2) \\ R &= (-2, -1, -1) \end{aligned}$$

Das Dreieck soll so orientiert werden, dass sich P von R aus gesehen links von Q befindet.
Lösung: $\frac{1}{2}$

Testat 13(II). Man berechne die Oberfläche der durch $(t, f(t)\cos(\phi), f(t)\sin(\phi))$ mit $0 \leq t \leq \infty$ und $0 \leq \phi \leq g(t)$ parametrisierten Fläche im $\mathbb{R}^3$, wobei f und g durch

$$\begin{aligned} f(t) &= 3 + 2 \cdot \cosh(\frac{t}{2}) \\ g(t) &= t \cdot \exp(-2 \cdot t) \end{aligned}$$

gegeben sind
Lösung: $\frac{1541}{900}$

Testat 1(III). Finden Sie jeweils die stärkste Aussage, die auf die nachfolgenden Funktionen f zutrifft.

A f ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

B f ist auf $\mathbb{C}$ bis auf eine diskrete Teilmenge holomorph.

C f ist auf einer dichten Teilmenge von $\mathbb{C}$ holomorph.

Dabei ist es auch möglich, dass keine der Aussagen zutrifft.

$$f(z) = e^{2z} + \frac{101}{\cos(z)+3}$$
$$f(z) = (z\overline{z}+3)\sin(z+3)$$
$$f(z) = \tan(1/z) + e^{z^2}$$

Lösung: B, X, C

Testat 2(III). Man bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^3} \cdot z^{n^3}}{2 + e^{2n^2} \cdot n^4}$$

Lösung: e^{-1}

Testat 3(III). Man berechne das Kurvenintegral von

$$(6 \cdot i \cdot \Re(z) + (2 + 10 \cdot i) \cdot \Im(z) + 2 + 3 \cdot i)\, dz$$

entlang folgender Kurve: Der Viertelkreis mit Mittelpunkt 0 von 2 nach $2 \cdot i$.
Lösung: $-30 - 10 \cdot i + (-8 - 10 \cdot i) \cdot \pi$.

Testat 4(III) Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen an den angegebenen Stellen eine hebbare Singularität (H), eine nicht-isolierbare Singularität (N), eine wesentliche Singularität (W) oder eine Polstelle (P) haben.

$$\log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right), \qquad z = i$$
$$\frac{\sin(z)\cos(z) - z}{z^4}, \qquad z = 0$$
$$\frac{1}{z} + e^{\tan(z)^2}, \qquad z = \pi$$

Lösung:N, P, H. Wegen Differenzen in der Definition einer Singularität ist im letzten Fall auch die Antwort *Es liegt keine Singularität vor* zugelassen.

Testat 5(III). Berechnen Sie das Residuum der Funktion

$$\frac{\tan(z) - 3 \cdot \sin(3z) + 4 \cdot \exp(5z) + \cos(z)}{3 \cdot \tan(3z)}$$

an der Stelle 0.
Lösung: $\frac{5}{9}$.

Testat 6(III). Integrieren Sie

$$\frac{\exp(z^2)}{(z^4 - z^3 + z^2 - z)}\,dz$$

entlang der folgenden Kurve: Der Kreis mit Radius 4 und Mittelpunkt -1, mathemematisch positiv durchlaufen.
Lösung: $-2 \cdot \pi \cdot i + e \cdot \pi \cdot i + e^{-1}\pi \cdot i$.

Testat 7(III). Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$\frac{(\exp(4 \cdot z) + 1)}{(\cos(z) \cdot (z^4 + 3 \cdot z^3 - 7 \cdot z^2 - 27 \cdot z - 18))}$$

im Nullpunkt.
Lösung: 1.

Testat 8(III). Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \frac{(3 \cdot t) \cdot \sqrt{t}}{(t^4 + 14 \cdot t^3 + 71 \cdot t^2 + 154 \cdot t + 120)}\,dt.$$

Lösung: $-\frac{5\cdot\sqrt{5}\pi}{2} - \frac{9\cdot\sqrt{3}\pi}{2} + 12\cdot\pi + \sqrt{2}\pi$.

Testat 9(III). Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \frac{(3\cdot t - 2)\cdot\sqrt{t}}{(t^4 + 11\cdot t^3 + 42\cdot t^2 + 64\cdot t + 32)}\, dt.$$

Lösung: $\frac{103\cdot\pi}{36} - 2\cdot\sqrt{2}\pi$.