Mathematik für Physiker III
Universität Bonn, WS 2013/14

Prof. Dr. Jens Franke
Jan Büthe

Testatreihe 4B

Testat 12(II). Man integriere das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = (1-y,-1,0)$$

über das Dreieck mit den Ecken

$$\begin{aligned} P &= (-1,0,1) \\ Q &= (0,0,2) \\ R &= (0,-1,2) \end{aligned}$$

Das Dreieck soll so orientiert werden, dass sich P von Q aus gesehen links von R befindet.
Lösung: $\frac{2}{3}$

Testat 13(II). Man berechne die Oberfläche der durch $(t, f(t)\cos(\phi), f(t)\sin(\phi))$ mit $0 \le t \le \infty$ und $0 \le \phi \le g(t)$ parametrisierten Fläche im $\mathbb{R}^3$, wobei f und g durch

$$\begin{aligned} f(t) &= 4 + 3 \cdot \cosh(\frac{t}{3}) \\ g(t) &= \exp(-t) \end{aligned}$$

gegeben sind
Lösung: $\frac{87}{10}$

Testat 1(III). Finden Sie jeweils die stärkste Aussage, die auf die nachfolgenden Funktionen f zutrifft.

A f ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

B f ist auf $\mathbb{C}$ bis auf eine diskrete Teilmenge holomorph.

C f ist auf einer dichten Teilmenge von $\mathbb{C}$ holomorph.

Dabei ist es auch möglich, dass keine der Aussagen zutrifft.

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z^9}{\sin(1/z)+3} \\
f(z) &= \log\left|z^2\right| + \cos(z) - 2i\arctan\left(\frac{\Re(z)}{\Im(z)}\right) \\
f(z) &= (1+\sin(z))^{13}\cos(z^2)
\end{aligned}$$

Lösung: C, C, A

Testat 2(III). Man bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{3n}\cdot z^n}{4+n^n}$$

Lösung: ∞

Testat 3(III). Man berechne das Kurvenintegral von

$$(2-6\cdot\Re(z)-4\cdot i\cdot\Im(z))\,dz$$

entlang folgender Kurve: $z=-4\cdot t-2\cdot t^2\cdot i$, durchlaufen von t=0 nach t=1.
Lösung: $-48-\frac{140\cdot i}{3}$.

Testat 4(III) Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen an den angegebenen Stellen eine hebbare Singularität (H), eine nicht-isolierbare Singularität (N), eine wesentliche Singularität (W) oder eine Polstelle (P) haben.

$$\begin{aligned}
&\frac{z}{\sin(|z|)}, && z=0 \\
&\frac{\sin(z)^2}{1-e^z}, && z=0 \\
&\log(1-e^{iz^2})+\frac{\sin(z)}{z^2-z}, && z=0
\end{aligned}$$

Lösung:N,H,N

Testat 5(III). Berechnen Sie das Residuum der Funktion

$$\frac{-4 \cdot \exp(-2z) - 4 \cdot z^2 + 5 \cdot z - 1}{5 \cdot \sin(2z)}$$

an der Stelle 0.
Lösung: $-\frac{1}{2}$.

Testat 6(III). Integrieren Sie

$$\frac{\exp(z^2)}{(z^4 + 3 \cdot z^3 + 9 \cdot z^2 + 27 \cdot z)}\, dz$$

entlang der folgenden Kurve: Der Kreis mit Radius 4 und Mittelpunkt 0, mathemematisch positiv durchlaufen.
Lösung: $-\frac{e^{-9}\pi \cdot i}{27} - \frac{e^{9} \cdot \pi \cdot i}{27} + \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{27}$.

Testat 7(III). Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$\frac{(z^4 + 3 \cdot z^3 - 4 \cdot z) \cdot (\exp(4 \cdot z) + 1)}{(z^4 - 5 \cdot z^2 + 4)}$$

im Nullpunkt.
Lösung: 1.

Testat 8(III). Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \frac{(-2 \cdot t - 1) \cdot \sqrt{t}}{(t^4 + 13 \cdot t^3 + 59 \cdot t^2 + 107 \cdot t + 60)}\, dt.$$

Lösung: $-\frac{113 \cdot \pi}{24} + \frac{5 \cdot \sqrt{3}\pi}{4} + \frac{9 \cdot \sqrt{5}\pi}{8}$.

Testat 9(III). Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \frac{(-2 \cdot t + 1) \cdot \sqrt{t}}{(t^4 + 13 \cdot t^3 + 61 \cdot t^2 + 123 \cdot t + 90)}\, dt.$$

Lösung: $\frac{\sqrt{3}\pi}{6} - \frac{5\cdot\sqrt{2}\pi}{3} + \frac{11\cdot\sqrt{5}\pi}{12}$.