Analysis III

Dozent: Hermann Karcher Assistent: Georg Biedermann

Aufgabe 4.1 Radiale Vektorfelder (vgl. Königsberger, Analysis 2, 5.6 Aufg.6)

(a) Eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *radial*, wenn ihre Niveaus konzentrische Sphären um $0 \in \mathbb{R}^n$ sind. Man kann dann F mit einer 1-dimensionalen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ausdrücken: $F(x) = f(\langle x, x\rangle)$. Berechnen Sie $\operatorname{grad} F$ bezüglich des Standard-Skalarproduktes $\langle x, y\rangle = \sum_j x_j y_j$ (falls f differenzierbar!).

(b) Nun sei V ein stetig differenzierbares Zentralfeld auf $\mathbb{R}^n - \{0\}$, es existiere also eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, für die

$$V(x) = \varphi(|x|^2)x$$

gilt. Zeigen Sie (mit (a) oder anders), daß V ein Gradientenfeld ist. Folgern Sie, daß die zu V wie in Aufgabe 3.4(a) assoziierte 1-Form ω_V, $\omega_V(x) := \langle V, x\rangle$ exakt ist, d.h. daß sie eine Stammfunktion besitzt.
Können Sie eine Stammfunktion explizit angeben, falls $V(x) := |x|^{-2\alpha}x, \alpha \in \mathbb{R}$ ist?

(c) Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^3 - \{0\}$ eine zweimal stetig differenzierbare Kurve, die die Differentialgleichung

$$\ddot{c}(t) = V(c(t)), \qquad V \text{ wie in (b)},$$

löst. Folgern Sie, daß $c(t) \times \dot{c}(t)$ (genannt *Drehimpuls*) konstant ist.

Aufgabe 4.2 Geodätische auf Niveauflächen

Es sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion, auf deren Niveau $N := \{F = 1\}$ die Ableitung dF nicht verschwindet. Ich wiederhole: Für Abbildungen mit **1-dimensionalem Bild** ist Leibniz' Bezeichnung der Ableitung kollisionsfrei und daher allgemein üblich; gewöhnen Sie sich in diesem Fall an dF statt TF. Ferner sei $\langle ., .\rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ und der Gradient von F definiert durch $\langle \operatorname{grad} F|_p, v\rangle = dF|_p(v)$. Schließlich sei $c : [a, b] \to N$ eine zweimal stetig differenzierbare Kurve.

(a) Differenzieren Sie $F \circ c$ zweimal.

(b) Setzen Sie zusätzlich voraus, daß $\ddot{c}(t) \perp N$ gilt, also $\ddot{c}(t)$ proportional zu $\operatorname{grad} F|_{c(t)}$. Solche Kurven heißen *geodätische Linien* auf N. — Benutzen Sie (a) und $\ddot{c}(t) \perp N$, um $\ddot{c}(t)$ aus $c(t), \dot{c}(t)$ und aus der ersten und zweiten Ableitung von F zu berechnen. Das Resultat ist also eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für c.

(c) Eine Lösung c der Differentialgleichung aus (b) mit $c(0) \in N$ und $\langle \operatorname{grad} F|_{c(0)}, \dot{c}(0)\rangle = 0$ verläuft ganz auf N.

Aufgabe 4.3 Iterierte Integrale (vgl. Königsberger, Analysis 2, 7.9 Aufg.2.)

Wir werden lernen, mehrdimensionale Integrale als iterierte 1-dimensionale Integrale zu berechnen. Das Auswerten iterierter Integrale beginnen wir zu üben.
Es sei $\Delta^3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x, y, z \geq 0,\ x + y + z \leq 1\}$ das Standardsimplex in $\mathbb{R}^3$.

Überlegen Sie, daß Δ^3 auch in der folgenden Weise beschrieben werden kann, die für iterierte Integration besser geeignet ist:

$$\Delta^3 = \{(u,v,w);\ 0 \le w \le 1,\ 0 \le v \le 1-w,\ 0 \le u \le 1-w-v\}.$$

Das folgende ist richtig:

$$\int_0^1 w^{r-1}(\int_0^{1-w} v^{q-1}(\int_0^{1-v-w} u^{p-1}du)dv)dw = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)\cdot\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r+1)}.$$

Entwickeln Sie den nach der ersten Integration auftretenden Term $(1-w-v)^p$ mit der binomi schen Formel nach Potenzen von v, danach können Sie die nächste Integration ausführen, usw. Dem Schlußresultat sehen Sie die Umformulierung in die angegebene Behauptung nicht an. Da es mir um die Integrationsübung geht, behandeln Sie den Fall $p=2, q, r=3$. Wenn wir den 3-dimensionalen Hauptsatz kennen, kommen wir noch einmal hierauf zurück.

Aufgabe 4.4 Dachprodukt für k-Formen

Wir haben bereits gesehen, wie man alternierende k-Formen mit Hilfe der Determinante hinschreiben kann. Wegen der Multilinearität ist klar, daß eine k-Form durch ihre Werte auf allen k-Tupeln von Vektoren einer Basis bestimmt ist. Um die Standardbasis auf dem Vektorraum der alternierenden k-Formen hinschreiben zu können, benötigen wir das Dachprodukt (z.B. Königsberger 13.1, S^p die Gruppe der Permutationen von $\{1,\dots,p\}$):

$$\wedge : \mathrm{Alt}^r \times \mathrm{Alt}^s \to \mathrm{Alt}^{r+s}$$

$$(\omega\wedge\eta)(v_1,\dots,v_{r+s}) := \frac{1}{r!s!}\sum_{\tau\in S^{r+s}} \mathrm{sign}(\tau)\cdot\omega(v_{\tau(1)},\dots,v_{\tau(r)})\eta(v_{\tau(r+1)},\dots,v_{\tau(r+s)}).$$

Dies Produkt ist offensichtlich bilinear (in den Argumenten ω,η). Es ist auch graduiert kommutativ und assoziativ. Wir wollen die Assoziativität des Dachprodukts von speziellen 1-Formen nachrechnen, weil wir damit eine Basis der alternierenden k-Formen gewinnen, aus der die volle Assoziativität des Dachproduktes abgelesen werden kann. Sei dazu $\{\delta^1,...,\delta^n\}$ die zur Basis $\{e_1,...,e_n\}$ des $\mathbb{R}^n$ duale Basis im Dualraum $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ von $\mathbb{R}^n$.

Denken Sie sich zu dem Ausdruck $\delta^{i_1}\wedge...\wedge\delta^{i_k}$ so viele Klammern hinzugefügt, daß Sie mit Hilfe der angegebenen Definition des Dachproduktes eine wohldefinierte alternierende k-Form erhalten. Zeigen Sie, daß diese k-Form unabhängig von der Klammerung auf einem k-Tupel von Basisvektoren genau dann einen Wert $\ne 0$ liefert, wenn dies k-Tupel eine Permutation von $(e_{i_1},\dots,e_{i_k})$ ist. Zeigen Sie weiter durch Induktion nach k, daß der Wert auf dem k-Tupel $(e_{i_1},\dots,e_{i_k})$ gerade $+1$ ist. Damit ist der Ausdruck $\delta^{i_1}\wedge...\wedge\delta^{i_k}$ eine alternierende k-Form, die unabhängig von der gedachten Klammerung ist. Das Dachprodukt von Basisformen ist also assoziativ.

Nochmalige Erinnerung: Für $j=1,...,n$ sind die Differentialformen dx^j die Ableitungen der zur Basis $\{e_1,...,e_n\}$ gehörenden linearen Koordinatenfunktionen $x^j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$; sie sind daher die konstanten Abbildungen

$$dx^j : \mathbb{R}^n \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}),\ dx^j|_p = \delta^j.$$

Daher hängt auch das Dachprodukt dieser Differentialformen, $dx^{i_1}\wedge...\wedge dx^{i_k}$, nicht von der Klammerung ab.