Einführung in die Algebra — Übungsblatt 10

Prof. Dr. Catharina Stroppel, Dr. Martin Palmer-Anghel (Assistent) // Wintersemester 17/18

[**Abgabe**: 21. Dezember 2017, **vor** der Vorlesung, 10:00 – 10:15]

Aufgabe 1. (6 Punkte $= 6 \cdot 1$)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Seien K_1 und K_2 Körper. Dann ist $K_1 \times K_2$ mit der komponentenweise Addition und Multiplikation wieder ein Körper.
(b) Ein Ringhomomorphismus $f\colon R \to K$ ist immer surjektiv wenn K ein Körper ist.
(c) Seien $L /\!\!/ K$ und $K /\!\!/ \mathbb{Q}$ endliche Körpererweiterungen, wobei L algebraisch abgeschlossen ist, und $\phi\colon K \to K$ ein Ringisomorphismus. Dann gibt es einen Ringisomorphismus $\psi\colon L \to L$ mit $\psi|_K = \phi$.
(d) Wenn $K /\!\!/ \mathbb{Q}$ eine endliche Körpererweiterung ist, ist jeder Ringhomomorphismus $K \to K$ ein Isomorphismus.
(e) Es existiert ein Körper K mit $K \subseteq K_1 \subsetneq K_2$, so dass K_1 und K_2 algebraische Abschlüsse von K sind.
(f) Es gibt eine einzige abelsche Gruppe der Ordnung 462 und genau zwei der Ordnung 780.

Aufgabe 2. (6 Punkte $= 2 + 3 + 1$)

Sei $L /\!\!/ K$ und $L' /\!\!/ K'$ algebraische Körpererweiterungen, $a \in L$ und $f\colon K \to K'$ ein Ringhomomorphismus. Wir schreiben $f_*\colon K[t] \to K'[t]$ für den induzierten Ringhomomorphismus der Polynomringe (durch Anwenden von f auf die Koeffizienten wie in der Vorlesung) und $p(t) = m_a(t) \in K[t]$ für das Minimalpolynom des Elements a über K.

(a) Gegeben $a' \in L'$ mit $f_*(p(t))(a') = 0$, konstruieren Sie einen Ringhomomorphismus $\varphi\colon K(a) \to L'$ mit $\varphi(a) = a'$ und $\varphi|_K = f$.
(b) Zeigen Sie, dass $\varphi \mapsto \varphi(a)$ eine Bijektion bildet zwischen der Menge aller Ringhomomorphismen $\varphi\colon K(a) \to L'$ mit $\varphi|_K = f$ und der Menge aller Nullstellen von $f_*(p(t))$ in L'.
(c) Zeigen Sie: Jeder Ringhomomorphismus $\varphi\colon K(a) \to L'$ mit $\varphi|_K = f$ induziert einen Isomorphismus von Körpern zwischen $K(a)$ und $f(K)(\varphi(a))$.

Aufgabe 3. (8 Punkte $= 2 + 2 + 1 + 2 + 1$)

Sei ϕ ein Automorphismus des Körpers $\mathbb{R}$. Wir wissen von der Aufgabe 4(a) auf Übungsblatt 8, dass die Einschränkung von ϕ auf $\mathbb{Q}$ die Identität ist, also $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Q})$.

(a) Zeigen Sie: Wenn $x < y$ für $x, y \in \mathbb{R}$, dann ist $\phi(x) < \phi(y)$.
Hinweis: eine reelle Zahl x ist genau dann positiv, wenn es $y \in \mathbb{R}$ gibt, mit $y \neq 0$ und $x = y^2$.
(b) Folgern Sie, dass ϕ die Identität sein muss.

Sei jetzt $a = \sqrt[n]{p} \in \mathbb{R}$, wobei n eine positive ganze Zahl und p eine Primzahl ist, und sei ϕ ein Automorphismus des Körpers $\mathbb{Q}(a) \subseteq \mathbb{R}$, also $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(a) /\!\!/ \mathbb{Q})$.

(c) Zeigen Sie, dass $\phi(a)^n = p$.
(d) Folgern Sie, dass der Körper $\mathbb{Q}(a)$ genau einen Automorphismus bzw. zwei Automorphismen besitzt, das heißt, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(a) /\!\!/ \mathbb{Q})$ zur trivialen Gruppe bzw. zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ isomorph ist, wenn n ungerade bzw. gerade ist.
(e) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\mathrm{i}) /\!\!/ \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (Isomorphismus von Gruppen) und beschreiben Sie explizit das nicht-triviale Element.