Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz **SS 2007**

Seminar: Formale Gruppen

Formale Gruppengesetze

Die Verweise beziehen sich auf das Buch von Zink [Z], Kapitel I. Als zusätzliche Quelle kann das Buch von Hazewinkel [H] herangezogen werden.

Definition formaler Gruppengesetze

1. Definition (§1) und Überblick über das Seminar.

Die Theorie in Charakteristik 0

Unser erstes Ziel ist es, zu zeigen, dass die Theorie formaler Gruppen(-gesetze) in Charakteristik 0 äquivalent ist zur Theorie der (endlich-dimensionalen) Lie-Algebren. Genauer ist der Tangentialraum einer formalen Gruppe eine Lie-Algebra, und diese Zuordnung liefert eine Äquivalenz von Kategorien.

2. Derivationen, Differentialformen, Tangentialraum (§§2–4).

3. Das $\mathbb{Q}$-Theorem (§5) beschreibt *kommutative* formale Gruppengesetze in Charakteristik 0. Außerdem: Differentialoperatoren (§6).

4. Wir definieren nun die Lie-Algebra einer formalen Gruppe, und deren einhüllende Algebra (§7). Wir definieren außerdem die Bigebra einer formalen Gruppe (§8). Schließlich beweisen wir die Hauptsätze der Lietheorie (§9), die die oben angesprochene Äquivalenz von Kategorien herstellen.

Explizite lokale Klassenkörpertheorie

Lokale Körper

5. Grundlagen über lokale Körper: Absolutbeträge, Vervollständigung, Lokale Körper, Beispiele, Fortsetzung des Betrags auf endliche Erweiterungen (etwa nach [F] 1,2, [C] 1–5, [N] II §§3–5, Details nach Absprache).

6. Verzweigungstheorie für Erweiterungen lokaler Körper: unverzweigte, total verzweigte Erweiterungen (etwa nach [F] 5–7, [N] II §7, Details nach Absprache).

Lubin-Tate-Gruppen

7. Wir definieren Lubin-Tate-Gruppen ([Z] I §11) (und sehen daran insbesondere, dass die Theorie der formalen Gruppen in positiver Charakteristik weit komplizierter ist als in Charakteristik 0). Siehe auch [LT], [Se] 3.1–3.3, 3.5.

Die Galois-Operation auf den Torsionspunkten

8. Wir folgen nun dem (sehr gut lesbaren) Originalartikel von Lubin und Tate [LT], und dem Artikel von Serre [Se] 3.1, 3.4, 3.6–3.8. Die wesentlichen Aussagen sind zusammengefasst in [Se] 3.4 Theorem 3.

Lokale Klassenkörpertheorie

9. In diesem Vortrag ordnen wir die aus der Theorie der formalen Gruppen erhaltenen Ergebnisse ein in die lokale Klassenkörpertheorie. Wir behandeln dazu den Abschnitt 5 aus Yoshidas Artikel [Y] (der Inhalt der Abschnitte 1–4 ist im wesentlichen in den vorherigen Vorträgen behandelt worden). Um zu einer vollständigen Fassung der lokalen Klassenkörpertheorie zu gelangen, fehlt dann noch der Satz von Kronecker-Weber im lokalen Fall, den wir nicht behandeln (siehe zum Beispiel [Y], Abschnitt 6). (Einen anderen Zugang zur lokalen Klassenkörpertheorie gibt Serre in [Se].)

Die formale Gruppe einer elliptischen Kurve

Minimale Weierstraß-Gleichungen, die Reduktionsabbildung, gute und schlechte Reduktion

10. [Si] VII, §§1, 2, 4, 5.

Punkte endlicher Ordnung und das Kriterium von Néron-Ogg-Shafarevich

11. [Si] VII, §§3, 6, 7.

Literatur

[C] J. W. S. Cassels, *Global Fields*, in [CF]

[CF] J. W. S. Cassels, A. Fröhlich, *Algebraic Number Theory*, Proc. Brighton 1965, Academic Press 1967.

[F] A. Fröhlich, *Local Fields*, in [CF]

[H] M. Hazewinkel, *Formal groups and applications*, Academic Press 1978.

[LT] J. Lubin, J. Tate, *Formal Complex Multiplication in Local Fields*, Ann. of Math. **81** (1965), 380–387.

[N] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer 1992.

[Se] J.-P. Serre, *Local class field theory*, in [CF].

[Si] J. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer GTM 106, 1986.

[Y] T. Yosida, *Local class field theory via Lubin-Tate theory*, to appear in Ann. Fac. Sci. Toulouse, math.NT/0606108

[Z] Th. Zink, *Cartiertheorie kommutativer formaler Gruppen*, Teubner 1984.