Kohomologie (pro-)endlicher Gruppen

(abgekupfert von J. Stix/O. Venjakob)

1. **Gruppenkohomologie in Graden 0,1 und 2.** G-Moduln, exakte Sequenz von abelschen Gruppen, G-Invarianten, Beispiele für Nichtexaktheit des Invariantennehmens [Ad] 1.1 + 2; 1-Kozykel, 1-Ränder, $H^1(G, A)$, die lange exakte Sequenz in Graden 0 & 1 [Ad] 1.3; 2-Kozykel, 2-Ränder, $H^2(G, A)$ [Ad] 1.4; Extensionen einer Gruppe G mit einem G-Modul, semidirekte Produkte und Spaltungen, Äquivalenzklasen von Spaltungen und H^1 [Br] IV.1+2; Isomorphieklassen von Extensionen und H^2 [We] Thm 6.6.3, [Br] IV.3.

2. **Homologische Algebra I: Projektive und injektive Moduln.** Moduln über einem Ring, Beispiele, Homomorphismen, exakte Sequenzen von R-Moduln [La] III §1; der R-Modul $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ [La] III §2; direkte Summen, gespaltene exakte Sequenzen [La] III §3 Prop 3.2; freie und projektive Moduln [La] III §4; Beispiel: projektive Moduln über Hauptidealringen (etwa $\mathbb{Z}$) [La] III Thm 7.1; Dualitätenprinzip (Pfeile umdrehen), injektive Moduln, Beispiel: injektive Moduln über Hauptidealringen (etwa $\mathbb{Z}$) [La] XX §4 Lemma 4.2.

3. **Homologische Algebra II: Auflösungen.** Komplexe, Abbildungen von Komplexen [La] XX §1; Definition der Homologie eines Komplexes und der Homologieabbildung einer Abbildung von Komplexen, Verträglichkeit mit Komposition [La] XX §2; Homotopien, homotope Abbildungen stimmen auf der Homologie überein [La] XX §5 Lemma 5.1; es gibt genügend viele injektive/projektive Moduln, [La] XX Thm 4.1; injektive/projektive Auflösungen, Isomorphie zwischen $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ und Homotopieklassen von Homomorphismen zwischen Auflösungen von M und N [La] XX §5 Lemma 5.2.

4. **Gruppenkohomologie I: Die Standardauflösung.** Der Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$, Augmentationsabbildung $\varepsilon : \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}$, Augmentationsideal I_G [HS] VI.1; G-Moduln und $\mathbb{Z}[G]$-Moduln [Se2] VII §1; Definition von $H^*(G, M)$ via projektiver Auflösung von $\mathbb{Z}$, genauer: wir definieren $H^i(G, M) = H^i(\mathrm{Hom}_G(P^\bullet, M))$ für eine projektive Auflösung $P^\bullet \longrightarrow \mathbb{Z}$ des trivialen G-Moduls $\mathbb{Z}$, nach Vortrag 3 kann man $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ für projektive Auflösungen $P^\bullet, Q^\bullet$ zu einer Abbildung $P^\bullet \longrightarrow Q^\bullet$ liften, dieser Lift liefert nach Anwendung von $\mathrm{Hom}_G(-, M)$ und Homologie einen eindeutigen Isomorphismus der bzgl. $P^\bullet$ und jener bzgl. $Q^\bullet$ definierten Kohomologie [Se2] VII §2; die Standardauflösung und (in-)homogene Koketten, Vergleich mit $H^i, i = 0, 1, 2$ aus Vortrag 1, H^1 mit trivialen Koeffizienten [Se2] VII §3, [Mi] II S. 47-48; Beispiel: die Kohomologie zyklischer Gruppen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}$ [We] 6.2.1+2, 6.1.4.

5. **Kategorielle Sprache.** Kategorie, Beispiele: $\mathrm{Mod}(R)$ und $\mathrm{Ch}^\diamond(\mathrm{Mod}(R))$ für einen Ring R und $\diamond \in \{+, -, b\}$ [Mi] II.4, [Gr] I.1, [We] Appendix A.1.2+4 + nach 1.1.5; Funktor, natürliche Transformation [Mi] II.4, [Gr] I.2, [We] Appendix A.2.1+A.3; direkte Summe, Nullobjekt, additive Kategorie [Mi] II.4, [Gr] I.1+3; Kern, Cokern, abelsche Kategorie, Freyd'scher Einbettungssatz (ohne Beweis), additiver Funktor, (links- bzw. rechts-) exakter Funktor [Mi] II.4, [Gr] I.4; opponierte Kategorie, Dualitätsprinzip, kontravariante Funktoren [HS] II.2+3, [Gr], I.1 [We] Appendix A.1.7+2.5.

6. **Homologische Algebra III: δ-Funktoren.** Schlangenlemma (inklusive Funktorialität in Abbildungen von kurzen exakten Sequenzen) [We] Snake Lemma 1.3.2 + Addendum 1.3.3, 5er-Lemma [We] Ex 1.3.3; Konstruktion einer kanonischen langen exakten Sequenz aus einer

kurzen exakten Sequenz von Komplexen von Moduln [We] Thm 1.3.1 + Prop 1.3.4; (exakte) kohomologische δ-Funktoren [We] 2.1.1; Beispiel: Gruppenkohomologie, genauer: $H^i(G,-)$ als Funktor (ein G-Homomorphismus $f : M \longrightarrow N$ liefert eine Abbildung $f\circ : \mathrm{Hom}_G(P^\bullet, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(P^\bullet, N)$, dessen Homologie die Abbildung $f_* = H^\bullet(G, f)$ liefert), zu einer kurzen exakten Sequenz $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ von G-Moduln gehört eine kurze exakte Sequenz von Komplexen abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(P^\bullet, M') \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(P^\bullet, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(P^\bullet, M'') \longrightarrow 0\,,$$

aus welcher der δ-Homomorphismus der Gruppenkohomologie gewonnen wird.

7. **Homologische Algebra IV: Derivierte Funktoren.** 3×3-Lemma [We] Ex. 1.3.2; "Hufeisenlemma" [La] XX §6 Seite 794 (aus Beweis von Thm 6.1), [We] 2.2.8 dualisiert für injektive; rechtsderivierte Funktoren für additive linksexakte Funktoren auf Kategorien von Moduln, Natürlichkeit des Verbindungshomomorphismus δ (impliziert die Unabhängigkeit von δ von der Wahl der Auflösungen) [We] 2.5.1 (dual zu 2.4.1-6); Beispiel: $\mathrm{Ext}^*_R(M,-)$ [We] 2.5.2; universelle kohomologische δ-Funktoren [Gr] II.1+2, [We] Def 2.1.4, auslöschbar, Auslöschbarkeit von exakten kohomologischen δ-Funktoren impliziert universell [Gr] II.2.1, [We] 2.4.7 (dualisiert+modifiziert); rechtsderivierte Funktoren sind universell [We] Cor 2.4.2 (dualisiert), Beispiel: der universelle kohomologische δ-Funktor des Funktors Kern auf der Kategorie der Pfeile hat nur einen ersten Derivierten: den Cokern, und die lange exakte Sequenz kommt aus dem Schlangenlemma.

8. **Gruppenkohomologie II: Dimensionsshift.** Definition von $H^*(G,M)$ als derivierter Funktor und als $\mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},-)$ [Se2] VII §2; Vergleich mit der alten Definition aus Vortrag 4, genauer: Vortrag 7 und Universalität definiert einen Morphismus von δ-Funktoren $\varphi^\bullet : R^\bullet(\quad)^G(-) \longrightarrow H^\bullet(G,-)$, wobei $H^\bullet(G,-)$ die Kohomologie nach alter Definition von Vortrag 4 ist, dieser ist ein Iso im Grad 0 und $H^\bullet(G,-)$ ist auslöschbar durch injektive/alternativ coinduzierte Moduln, daher ist $\varphi^\bullet$ ein Iso; (co-)induzierte Moduln, Shapiros Lemma [We] 6.3.1-5, [Mi] II.1; Dimensionsshift [Se2] VII §2 Corollary, [Mi] II.1.13.

9. **Gruppenkohomologie III: Funktorialität in der Gruppe.** Restriktion, Inflation, und allgemeiner die Abbildung zu einem Paar von Gruppenhomomorphismus und passendem Modulhomomorphismus, explizite Beschreibung auf (in-)homogenen Koketten, innere Automorphismen operieren trivial [Se2] VII §5, [Ne] I §4.1+2; die inf/res-Sequenz im Grad 1 [Se2] VII §6; die Corestriktion, cor ∘ res ist Multiplikation mit dem Index, [Se2] VII §7; Anwendung: $H^*(G,M)$ ist $\#G$-Torsion für eine endliche Gruppe G und $* > 0$ [Se2] VIII §2, Satz von Schur-Zassenhaus [We] Thm 6.6.9.

10. **Kohomologie proendlicher Gruppen.** Diskrete G-Moduln [Se1] I §2.1; Vergleich dreier Definitionen von stetiger Kohomologie proendlicher Gruppen mit diskreten Koeffizienten: stetige Koketten, ad hov via $\varinjlim H^q(G/N, M^N)$ über Inflation, als abgeleiteter Funktor auf der Kategorie der diskreten G-Moduln (nutze stetige coinduzierte Moduln zum Auslöschen [Se1] I §2.5, [NSW] I §3 1.3.6+7) [Se1] I §2.2, [NSW] I §2 1.2.6, [Mi] II.3 Prop 3.2 + Aside 3.4; Verträglichkeit mit Limites in der Gruppe und den Koeffizienten [Se1] I §2.2; Interpretation in Graden 0,1 und 2 [Se1] I §2.3; Inflation, Restriktion, Corestriktion [NSW] I §5; Beispiel: Kohomologie von $\hat{\mathbb{Z}}$ [Se2] XIII §1.

11. **Galoiskohomologie.** Gruppenkohomologie der Galoisgruppe einer Körpererweiterung/der absoluten Galoisgruppe, alternative Beschreibung von diskreten Moduln A durch $L/K \mapsto$

$A_L = A^{\mathrm{Gal}_L}$, additive Gruppe $\mathbb{G}_a : L/K \mapsto (L, +)$, multiplikative Gruppe $\mathbb{G}_m : L/K \mapsto (L^*, \cdot)$ [Se1] II §1.1; Normalbasensatz, $H^i(K, \mathbb{G}_a)$ [Se2] X §1 Prop 1, [NSW] VI §1 6.1.1; Hilbert 90, $H^1(K, \mathbb{G}_m)$ [Se2] X §1 Prop 2, [NSW] VI §2 6.2.1; Kummertheorie, Artin-Schreier-Theorie [Se2] X §3, [NSW] VI §1+2.

12. **Kohomologische Dimension.** Kohomologische Dimension [Se1] I §3.1, [NSW] III §3; strikte kohomologische Dimension [Se1] I §3.2; kohomologische Dimension von Untergruppen [Se1] I §3.3 Prop 14; pro-p Sylowtheorie [Se1] I §1.4; $\mathrm{cd}_p(G) = 0$ [Se1] I §3.3 Corollary1-3; freie pro-p Gruppen [Se1] I §1.5; $\mathrm{cd}_p(G) \leq 1$ [Se1] I §3.4; [NSW] III §5.

13. **Kohomologie von pro-p Gruppen.** Einfache Moduln [Se1] I §4.1 Prop 20+21; H^1 und Erzeuger [Se1] I §4.2; H^2 und Relationen [Se1] I §4.3; Golod-Shafarevich-Ungleichung [Se1] I §4.4 + I Appendix 2, [NSW] III §9.

Literatur

[Ad] Adam, M., Einführung in die Gruppenkohomologie, http://www.uni-math.gwdg.de/mad/seminar- algebra/Gruppen-Kohomologie.dvi, 2001.

[Br] Brown, K. S., *Cohomology of groups*, GTM 87, Springer, 1982.

[Gr] Grothendieck, A., Sur quelque points d'algèbre homologique, *Tohoku Math. Journal* 9 (1957), 119-221.

[HS] Hilton, P. J., Stammbach, U., *A course in homological algebra*, GTM 4, Springer, 1996.

[La] Lang, S., *Algebra*, revised third edition, GTM 211, Springer, 2002.

[Mi] Milne, J., *Class field theory*, http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/math776.dvi, 1997.

[Ne] Neukirch, J., *Klassenkörpertheorie*, BI-Hochschulskripten, 1969.

[NSW] Neukirch, J., Schmidt, A., Wingberg, K., *Cohomology of number fields*, Springer, Grundlehren 323, 1999.

[Se1] Serre, J.-P., *Galois cohomology*, new edition, Springer, monographs in math., 1996.

[Se2] Serre, J.-P., *Local fields*, GTM 67, Springer, 1979.

[We] Weibel, Ch. A., *An introduction to homological algebra*, Cambdridge Univ. Press, 1994.

Vorbesprechung: Donnerstag, 12.07.2012, 16.15 Uhr
(Raum MZ 0.006)