Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz **WS 2003/04**

Lineare Algebra I

11. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 13.01.04 in der Vorlesung

Aufgabe 1

Sei K ein Körper und seien $A, B, C, D, X, Y, Z, W \in M_n(K)$. Betrachte die Blockmatrizen

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} \in M_{2n}(K).$$

Ferner bezeichne $0 \in M_n(K)$ die Nullmatrix. Zeige:

a) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX + BZ & AY + BW \\ CX + DZ & CY + DW \end{pmatrix}$.

b) $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D), \quad \det \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix} = (-1)^n \det(B)\det(C).$

c) Sei eine der Matrizen A, B, C, D invertierbar. Zeige:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{cases} \det(DA - CA^{-1}BA) & \text{falls } A \in GL_n(K) \\ (-1)^n \det(CB - DB^{-1}AB) & \text{falls } B \in GL_n(K) \\ (-1)^n \det(BC - AC^{-1}DC) & \text{falls } C \in GL_n(K) \\ \det(AD - BD^{-1}CD) & \text{falls } D \in GL_n(K) \end{cases}$$

Hinweis: Zeige in b) und c) zunächst einen der Fälle, und folgere dann daraus den anderen Fall bzw. die anderen Fälle.

d) Sei $\det(A) = \det(B) = \det(C) = \det(D) = 0$. Folgt daraus, dass

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 0\ ?$$

Aufgabe 2

Sei n eine natürliche Zahl.

a) Wie viele Multiplikationen und Divisionen sind nötig, um die Determinante einer Matrix $A \in M_n(\mathbb{Q})$ zu berechnen,

i) wenn man die Formel von Leibniz benutzt,
ii) wenn man sukzessive nach der jeweils letzten Zeile entwickelt und sich dabei alle berechneten Werte von Unterdeterminanten für den weiteren Verlauf der Rechnung merkt,
iii) wenn man das Gaußsche Eliminationsverfahren anwendet?

b) Wie viele Multiplikationen und Divisionen sind nötig, um ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in GL_n(\mathbb{Q})$, $b \in \mathbb{Q}^n$ nach $x \in \mathbb{Q}^n$ aufzulösen, i)-iii) wenn man die Cramersche Regel anwendet und dabei jede Determinante nach Methode a) i) (bzw. ii) bzw. iii)) separat berechnet,

iv) wenn man das Gaußsche Eliminationsverfahren anwendet,

v) wenn man die Cramersche Regel benutzt und die dafür benötigten Determinanten simultan nach Methode a) ii) berechnet, indem man ihre gemeinsamen Unterdeterminanten jeweils nur einmal bestimmt?

c) Wieviel Rechenzeit benötigt ein Computer zum Lösen eines solchen Gleichungssystems im Fall $n = 25$ mindestens,

i) wenn er nach Methode b) i) vorgeht und für eine Multiplikation bzw. Division $3 \cdot 10^{-19}$ Sekunden (das ist etwa Atomradius geteilt durch Lichtgeschwindigkeit) benötigt,

ii) wenn er nach Methode b) iv) vorgeht, aber nur 3000 Multiplikationen bzw. Divisionen in der Sekunde schafft?

Bemerkung: Vorzeichenänderungen (etwa beim Vertauschen zweier Zeilen oder beim Multiplizieren mit dem Signum einer Permutation) sollen stets vernachlässigt werden.

Aufgabe 3

Sei $n \geq 2$. Eine Transposition $\tau \in S_n$ heißt elementar, falls $\tau = \tau_{i,i+1}$ für ein $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Für $\sigma \in S_n$ sei $\ell(\sigma)$ das Minimum aller $r \geq 0$, so dass sich σ in der Form $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_r$ mit elementaren Transpositionen τ_i schreiben läßt. Sei

$$d(\sigma) = \#\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ 1 \leq i < j \leq n,\ \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$

a) Zeige, dass stets $\ell(\sigma) = d(\sigma)$ gilt. (*Hinweis:* Zeige dass $d(\tau\sigma) = d(\sigma) \pm 1$, wenn τ eine elementare Transposition ist, und folgere $\ell(\sigma) \geq d(\sigma)$. Durch Induktion nach $d(\sigma)$ zeigt man dann $\ell(\sigma) \leq d(\sigma)$.)

b) Folgere aus a) die Gleichung

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

c) Formuliere die Aussage von b) mit Hilfe des Begriffs des Fehlstandes. (Ein Paar (i, j), $1 \leq i < j \leq n$, heißt Fehlstand der Permutation σ, falls $\sigma(i) > \sigma(j)$.)

Aufgabe 4

Sei K ein Körper und n eine natürliche Zahl. Es seien $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in K$ gegeben, so dass $a_i + b_j \neq 0$ für alle i, j. Die Matrix $C = (c_{ij}) \in M_n(K)$ sei definiert durch

$$c_{ij} = \frac{1}{a_i + b_j}$$

für alle i und j. Zeige:

$$\det(C) = \prod_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{a_i + b_j} \right) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} ((a_i - a_j)(b_i - b_j)).$$

Hinweis: Gaußscher Algorithmus.