Prof. Dr. M. Rapoport **SS 2004**
Dr. U. Görtz

Lineare Algebra II

7. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 15.06.04 in der Vorlesung

Aufgabe 1

Für $A \in O(4, \mathbb{R})$ gelte

$$\mathrm{Spur}(A) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \qquad \mathrm{Spur}(A^2) = \frac{1}{2}(-3-\sqrt{5}).$$

Berechne A^{30}.

Aufgabe 2

Sei $n \geq 2$, K ein Körper und $A, B \in M_n(K)$. Zeige:

a) Ist AB nilpotent, so auch BA.

b) Sind A und B nilpotent und gilt $AB = BA$, so sind auch $A + B$ und AB nilpotent.

c) Es gibt nilpotente Matrizen A und B, so dass $A+B$ und AB nicht nilpotent sind.

d) Ist A nilpotent und diagonalisierbar, so gilt $A = 0$.

Aufgabe 3

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $f \colon V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Es gelte $f^k = \mathrm{id}_V$ für ein $k \geq 1$. Für $j = 1, \ldots, k$ setzen wir:

$$\lambda := \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{k}\right) \in \mathbb{C}, \qquad P_j(X) = \frac{1}{k}\sum_{\ell=1}^{k} \lambda^{j\ell} X^{k-\ell} \in \mathbb{C}[X].$$

Zeige:

a) $1 = P_1(X) + P_2(X) + \cdots + P_k(X)$.

b) $\mathrm{im}(P_j(f)) = V(f, \lambda^j)$.

c) $V = \bigoplus_{j=1}^{k} V(f, \lambda^j)$.

Aufgabe 4

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & -8 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q}).$$

a) Bestimme die Eigenwerte von A.

b) Bestimme Basen der verallgemeinerten Eigenräume $V(\lambda, A)^{\mathrm{all}}$ für jeden Eigenwert λ von A.