Dr. Ulrich Görtz **WS 2005/06**

Übungen zur Algebraischen Geometrie

Blatt 1, Abgabe am 26.10.2005

Aufgabe 1 *(Hilbertscher Basissatz)*

Sei A ein noetherscher Ring. Zeige, dass dann auch der Polynomring $A[T]$ noethersch ist.

Hinweis: Betrachte zu einem Ideal $\mathfrak{b} \subseteq A[T]$ die Kette von Idealen $\mathfrak{a}_i \subseteq A$, wo $\mathfrak{a}_i$ das von den Leitkoeffizienten aller Polynome in $\mathfrak{b}$ vom Grad $\leq i$ erzeugte Ideal ist.

Aufgabe 2

Ein nicht-leerer topologischer Raum X heißt irreduzibel, wenn sich X nicht als Vereinigung zweier echter abgeschlossener Teilmengen schreiben lässt.

a) Bestimme alle irreduziblen Hausdorff-Räume.

b) Zeige, dass für einen algebraisch abgeschlossenen Körper k der affine Raum $\mathbb{A}^n(k)$ (mit der Zariski-Topologie) irreduzibel ist.

c) Zeige, dass die folgenden Bedingungen an einen nicht-leeren topologischen Raum äquivalent sind:

i) X ist irreduzibel.
ii) Jede nicht-leere offene Teilmenge von X ist dicht.
iii) Jede offene Teilmenge von X ist zusammenhängend.
iv) Je zwei nicht-leere offene Teilmengen haben nicht-leeren Schnitt.

Aufgabe 3

Ein topologischer Raum X heißt noethersch, wenn jede absteigende Kette $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots$ abgeschlossener Teilmengen von X stationär wird.

Sei X ein noetherscher topologischer Raum.

a) Zeige, dass sich jede nicht-leere abgeschlossene Teilmenge $Y \subseteq X$ als endliche Vereinigung $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_k$ irreduzibler abgeschlossener Teilmengen Y_i von X schreiben läßt.

b) Zeige, dass die Y_i in a) eindeutig bestimmt sind (bis auf die Reihenfolge), sofern man noch verlangt, dass $Y_i \not\subseteq Y_j$ für $i \neq j$. Die Y_i heißen dann die irreduziblen Komponenten von Y.

Aufgabe 4

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

a) Betrachte die Teilmenge $V = \{(t, t^2, t^3);\ t \in k\} \subseteq \mathbb{A}^3(k)$. Zeige, dass V eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge in $\mathbb{A}^3(k)$ ist. Gib Erzeuger des Ideals $I(V)$ an.

b) Sei $V = V(X^2 - YZ, XZ - X) \subseteq \mathbb{A}^3(k)$. Zeige, dass V aus drei irreduziblen Komponenten besteht und bestimme die zugehörigen Primideale.