3 Schemata

Inhalt

- Affine Schemata, Schemata
- Einfache Eigenschaften von Schemata
- Prävarietäten als Schemata
- Rationale Abbildungen, Funktionenkörper
- Nicht algebraisch abgeschlossene Grundkörper

Notationen

Diese Notationen sollten schon in Kapitel 2 eingeführt werden; vielleicht ist die Wiederholung an dieser Stelle dann verzichtbar. Sei $(X,\mathscr{O}_X)$ ein lokal geringter Raum. Ist $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge, so erhalten wir durch *Einschränkung* der Strukturgarbe einen lokal geringten Raum $(U,\mathscr{O}_{X|U})$ (d. h. wir setzen $\mathscr{O}_{X|U}(V) := \mathscr{O}_X(V)$ für $V \subseteq U$ offen). Den Halm $\mathscr{O}_{X,x}$ der Strukturgarbe $\mathscr{O}_X$ in einem Punkt $x \in X$ bezeichnen wir auch als den *lokalen Ring* von X in x (nach Voraussetzung ist dies tatsächlich ein lokaler Ring, d. h. er besitzt genau ein maximales Ideal). Ist $U \subseteq X$ offen, so stimmen die Halme $\mathscr{O}_{X,x}$ und $\mathscr{O}_{X|U,x}$ überein.

Ist $\mathscr{F}$ eine Garbe auf X, so schreiben wir im folgenden oft $\Gamma(U,\mathscr{F})$ anstelle von $\mathscr{F}(U)$; insbesondere also $\Gamma(U,\mathscr{O}_X) = \mathscr{O}_X(U)$.

Affine Schemata, Schemata

(3.1) Einführung.

(3.2) Schemata.

Wir gehen bei der Definition des Schema-Begriffs ähnlich vor wie bei der Definition von Prävarietäten in Kapitel 1. Die lokalen Bausteine, die wir zulassen, sind die Primspektren von Ringen, mit der Struktur eines lokal geringten Raumes, wie im vorhergehenden Kapitel erklärt. Diese lokal geringten Räume nennen wir affine Schemata:

Definition 3.1. *Ein* affines Schema *ist ein lokal geringter Raum, der isomorph ist zu einem lokal geringten Raum der Form* $\operatorname{Spec} R$*,* R *ein Ring.*

Beispiele für affine Schemata *(Dieser Abschnitt sollte vielleicht in Kapitel 2 verschoben werden.)*

Wir haben bereits die zugrundeliegenden topologischen einiger affiner Schemata diskutiert, und wollen hier an einigen Beispielen erläutern, wie die zusätzliche Information, die durch die Strukturgarbe gegeben ist, geometrisch interpretiert werden kann.

1. $\operatorname{Spec} K$, K Körper.
2. $\operatorname{Spec} K[X]/(X^n)$, K Körper, $n > 1$.
3. $\operatorname{Spec} A$, A endlich erzeugte integre k-Algebra, k algebraisch abgeschlossener Körper.
4. $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$
5. $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, $\mathcal{O}_K$ der Ganzheitsring in einem Zahlkörper K
6. R ein Ring. Wir definieren $\mathbb{A}^n_R := \operatorname{Spec} R[T_1, \dots, T_n]$ und nennen dieses affine Schema den *affinen Raum der Dimension n über R.*

Letztlich wollen wir aber nicht nur affine Schemata betrachten, sondern alle lokal geringten Räume, die lokal aussehen wie affine Schemata:

Definition 3.2. *Ein* Schema *ist ein lokal geringter Raum $(X,\mathscr{O}_X)$, der eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ besitzt, so dass alle lokal geringten Räume $(U_i,\mathscr{O}_X|_{U_i})$ affine Schemata sind.*

Ein Morphismus von Schemata *ist ein Morphismus der zugrundeliegenden lokal geringten Räume. Wir erhalten so die Kategorie* (Sch) *der Schemata.*

Sei S ein Schema. Die Kategorie $(\mathrm{Sch}_{/S})$ der Schemata über S (oder S-Schemata) ist die Kategorie deren Objekten Morphismen $X \to S$ von Schemata, und deren Morphismen $\operatorname{Hom}(X \to S, Y \to S)$ kommutative Dreiecke

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

sind. Der Morphismus $X \to S$ heißt der *Strukturmorphismus* des S-Schemas X (und wird in der Notation oft nicht explizit erwähnt). Ist $S = \operatorname{Spec} R$ ein affines Schema, so spricht man stattdessen auch von R-Schemata oder Schemata über R.

Noch eine Bemerkung zur Terminologie: Früher (insbesondere in Grothendiecks [EGA]) wurden die Objekte, die wir Schemata nennen, als Präschemata bezeichnet. Heutzutage (und auch schon in [EGA $\mathrm{I}_{\mathrm{neu}}$]) wird nur noch die oben eingeführte Bezeichnungsweise benutzt.

(3.3) Offene Unterschemata.

Lemma 3.3. *Sei $X = \operatorname{Spec} R$ ein affines Schema, $f \in R$ ein Element des Koordinatenrings, und $U = D(f)$. Dann ist $(U,\mathscr{O}_{X|U})$ ein affines Schema mit Koordinatenring R_f.*

Beweis. Der natürliche Ringhomomorphismus $R \to R_f$ induziert einen Homöomorphismus $\operatorname{Spec} R_f \to D(f)$. Das Lemma folgt dann direkt aus der Definition der Strukturgarbe eines affinen Schemas. $\square$

Satz 3.4.
(1) *Sei X ein Schema, und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Dann ist der lokal geringte Raum $(U,\mathscr{O}_{X|U})$ ein Schema. Wir bezeichnen U als* offenes Unterschema *von X. Ist U ein affines Schema, so heißt U ein* affines offenes Unterschema*.*
(2) *Sei X ein Schema. Die affinen offenen Unterschemata bilden eine Basis der Topologie.*

Genauer sollte man im zweiten Teil des Satzes von den offenen Teilmengen des topologischen Raums X, die ein affines offenes Unterschema induzieren, sprechen. Diese Feinheit werden wir in der Regel übergehen.

Beweis. Nach Definition lässt sich der lokal geringte Raum X durch affine Schemata überdecken, und nach dem Lemma und **??** besitzt jedes dieser affinen Schemata eine Basis der Topologie, die aus affinen Schemata besteht. Daraus folgen beide Behauptungen des Satzes. $\square$

Sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge, und $j\colon U \to X$ die Inklusionsabbildung. Wir betrachten U als offenes Unterschema von X. Ist $V \subseteq X$ offen, so liefert uns die Restriktionsabbildung der Garbe $\mathscr{O}_X$ eine Abbildung

$$\Gamma(V,\mathscr{O}_X) \to \Gamma(V \cap U,\mathscr{O}_X) = \Gamma(j^{-1}(V),\mathscr{O}_{X|U}) = \Gamma(V,j_*\mathscr{O}_{X|U})$$

Insgesamt erhalten wir einen Garbenhomomorphismus $\mathscr{O}_X \to j_*\mathscr{O}_{X|U}$ und zusammen mit der Inklusion $U \subseteq X$ einen Schemamorphismus $U \to X$. Wenn immer wir (womöglich implizit) von einem Morphismus von Schemata von U nach X sprechen, so ist dieser Morphismus gemeint.

Eine *affine offene Überdeckung* eines Schemas X ist eine offene Überdeckung $X = \bigcup_i U_i$, in der alle U_i affine offene Unterschemata von X sind.

Wir werden offene (und abgeschlossene und lokal abgeschlossene) Unterschema im Kapitel **??** genauer studieren. Schließlich notieren wir noch das folgende Lemma, das uns gelegentlich nützlich sein wird.

Lemma 3.5. *Sei X ein Schema, und seien U, V affine offene Unterschemata von X. Dann existiert ein offenes Unterschema $W \subseteq U \cap V$, das sowohl in U als auch in V eine ausgezeichnete offene Teilmenge ist.*

Beweis. Indem wir gegebenenfalls V durch eine ausgezeichnete offene Teilmenge von V ersetzen, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $V \subseteq U$. Ist dann $f \in \Gamma(U,\mathscr{O}_X)$ mit $D(f) \subseteq V$, und $\overline{f}$ das Bild von f unter dem natürlichen Ringhomomorphismus $\Gamma(U,\mathscr{O}_X) \to \Gamma(V,\mathscr{O}_X)$, so gilt $D_U(f) = D_V(\overline{f})$. (Aus den Garbenaxiomen folgt dann auch $\Gamma(U,\mathscr{O}_X)_f \cong \Gamma(V,\mathscr{O}_X)_{\overline{f}}$.) $\square$

(3.4) Morphismen in affine Schemata.

Die Morphismen eines beliebigen Schemas in ein affines Schema sind, wie der folgende Satz zeigt, einfach zu verstehen. Die entsprechende Aussage gilt sogar für jeden lokal geringten Raum X. Der Beweis ist dann etwas aufwändiger, aber durchaus auch interessant; siehe [?], Prop. 1.6.3.

Satz 3.6. *Seien X ein Schema und $Y = \operatorname{Spec} B$ ein affines Schema. Dann ist die natürliche Abbildung*

$$\operatorname{Hom}(X,Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}(B,\Gamma(X,\mathscr{O}_X)), \quad (f,f^\flat) \mapsto f^\flat(Y),$$

eine Bijektion.

Beweis. Sei $X = \bigcup_i U_i$ eine offene affine Überdeckung. Wir wissen aus Kapitel 2, **??**, dass für alle U_i die natürliche Abbildung

$$\operatorname{Hom}(U_i,Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}(B,\Gamma(U_i,\mathscr{O}_X))$$

eine Bijektion ist. Ist $V \subseteq U_i \cap U_j$ eine offene affine Teilmenge, so ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}(U_i,Y) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}(B,\Gamma(U_i,\mathscr{O}_X)) \arrow[d] \\ \operatorname{Hom}(V,Y) \arrow[r] & \operatorname{Hom}(B,\Gamma(V,\mathscr{O}_X)) \end{tikzcd}$$

kommutativ, weil die Bildung des Spektrums funktoriell ist. Die Behauptung folgt dann aus dem folgenden, ganz allgemeinen Satz über das Verkleben von Morphismen. □

Satz 3.7. (Verkleben von Morphismen) *Seien X, Y lokal geringte Räume, sei $X = \bigcup_i U_i$ eine offene Überdeckung. Dann ist die folgende Sequenz exakt:*

$$\operatorname{Hom}(X,Y) \xrightarrow{\varphi} \prod_i \operatorname{Hom}(U_i,Y) \overset{\psi_1}{\underset{\psi_2}{\rightrightarrows}} \prod_{ij} \operatorname{Hom}(U_i \cap U_j,Y),$$

das heißt φ ist injektiv, und $\operatorname{Im}\varphi = \{f;\ \psi_1(f) = \psi_2(f)\}$.

Mit anderen Worten: eine Familie von Morphismen $U_i \to Y$ verklebt sich genau dann zu einem Morphismus $X \to Y$, wenn die Morphismen auf den Durchschnitten übereinstimmen, und dieser ist dann eindeutig bestimmt.

Beweis. Einfach. (Der Satz gilt ganz analog auch für Mengen und topologische Räume. Es ist dann leicht zu sehen, dass man auch den Garbenmorphismus $\mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ durch Verkleben definieren kann.) □

Da es zu jedem Ring R einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to R$ gibt, erhalten wir

Korollar 3.8. *Sei X ein Schema. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $X \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ von Schemata. Mit anderen Worten: $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ ist ein terminales Objekt in der Kategorie der Schemata.*

Wir sehen auch, dass $\operatorname{Hom}(X, \operatorname{Spec}\mathbb{Z}) = \Gamma(X,\mathscr{O}_X)$ (oder allgemeiner, für ein R-Schema X: $\operatorname{Hom}_R(X,\mathbb{A}^1_R) = \Gamma(X,\mathscr{O}_X)$ als R-Algebren).

(3.5) Morphismen von $\operatorname{Spec} K$, K Körper, in Schemata.

Sei X ein Schema. Sei $x \in X$, und sei $U \subseteq X$ eine affine offene Umgebung von x, etwa $U = \operatorname{Spec} R$. Sei $\mathfrak{p} \subset R$ das zu x gehörige Primideal. Es ist dann $\mathscr{O}_{X,x} = \mathscr{O}_{U,x} = R_\mathfrak{p}$, und aus dem natürlichen Homomorphismus $R \to R_\mathfrak{p}$ erhalten wir einen Morphismus

$$\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{X,x} = \operatorname{Spec} R_\mathfrak{p} \to \operatorname{Spec} R = U \subseteq X$$

von Schemata. Es ist leicht zu sehen, dass dieser Morphismus unabhängig von der Wahl von U ist.

Ist $\kappa(x) = \mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ der Restklassenkörper von X im Punkt x, so erhalten wir

$$i_x\colon \operatorname{Spec} \kappa(x) \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{X,x} \longrightarrow X.$$

Das Bild des einzigen Punktes von $\operatorname{Spec} \kappa(x)$ unter i_x ist der Punkt x.

Sei nun K ein Körper, sei $f\colon \operatorname{Spec} K \to X$ ein Morphismus, und sei $x \in X$ der Bildpunkt des einzigen Punktes p von $\operatorname{Spec} K$. Da f ein Morphismus von lokal geringten Räumen ist, induziert f einen lokalen Morphismus $\mathscr{O}_{X,x} \to K = \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} K,p}$ und folglich einen Morphismus $\iota\colon \kappa(x) \to K$ der Restklassenkörper. Mit anderen Worten: Der Morphismus f faktorisiert als $f = (\operatorname{Spec} \iota) \circ i_x\colon \operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} \kappa(x) \to X$.

Satz 3.9. *Wir erhalten so eine Bijektion*

$$\operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} K, X) \longrightarrow \{(x,\iota);\ x \in X,\ \iota\colon \kappa(x) \to K\}$$

Beweis. Wir können einem Element $(x,\iota\colon \kappa(x) \to K)$ der Menge auf der rechten Seite einen Morphismus

$$\operatorname{Spec} K \xrightarrow{\operatorname{Spec} \iota} \operatorname{Spec} \kappa(x) \xrightarrow{i_x} X$$

zuordnen, und die beiden Abbildungen sind invers zueinander. □

(3.6) Verkleben von Schemata; disjunkte Vereinigung.

Definition 3.10. *Ein* Verklebedatum *von Schemata besteht aus den folgenden Daten:*

- *eine Indexmenge I,*
- *für alle $i \in I$ ein Schema U_i,*
- *für alle $i,j \in I$ eine offene Teilmenge $U_{ij} \subseteq U_i$ (wir fassen U_{ij} als offenes Unterschema von U_i auf),*
- *für alle $i,j \in I$ ein Isomorphismus $\varphi_{ji}\colon U_{ij} \to U_{ji}$ von Schemata,*

so dass
(a) $U_{ii} = U_i$ *für alle* $i \in I$
(b) Kozykelbedingung: $\varphi_{kj} \circ \varphi_{ji} = \varphi_{ki}$ *auf* $U_{ij} \cap U_{ik}$, $i,j,k \in I$.

Die Kozykelbedingung ist dabei so zu verstehen, dass wir insbesondere $\varphi_{ji}(U_{ij} \cap U_{ik}) \subseteq U_{jk}$ verlangen, so dass die Verknüpfung sinnvoll ist. Aus der Kozykelbedingung folgt dann insbesondere (mit $i = j = k$), dass $\varphi_{ii} = \mathrm{id}_{U_i}$ und (mit $i = k$) dass $\varphi_{ij}^{-1} = \varphi_{ji}$, und dass φ_{ji} einen Isomorphismus $U_{ij} \cap U_{ik} \to U_{ji} \cap U_{jk}$ liefert.

Offenbar kann man ganz analog den Begriff eines Verklebedatums von Mengen, topologischen Räumen oder (lokal) geringten Räumen definieren. In allen diesen Fällen ist es möglich, aus einem Verklebedatum "durch Verkleben" ein neues Objekt der entsprechenden Kategorie zu konstruieren, das eine universelle Eigenschaft erfüllt. Im Falle von Schemata zeigen wir das im folgenden Satz.

Satz 3.11. *Sei $((U_i)_{i\in I},(U_{ij})_{i,j\in I},(\varphi_{ij})_{i,j\in I})$ ein Verklebedatum von Schemata. Dann existiert ein Schema X zusammen mit Morphismen $\psi_i\colon U_i \to X$, so dass für alle i die Abbildung ψ_i einen Isomorphismus von U_i mit einem offenen Unterschema von X induziert, dass $X = \bigcup_i \psi_i(U_i)$ und dassfür alle $i,j \in I$ gilt: $\psi_i(U_i) \cap \psi_j(U_j) = \psi_i(U_{ij}) = \psi_j(U_{ji})$. Es ist X zusammen mit den ψ_i eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus.*

Satz 3.7 über das Verkleben von Morphismen zeigt, dass ein Schema X wie im Satz die folgende universelle Eigenschaft besitzt. Für alle $i \in I$ identifiziert ψ_i das Schema U_i mit einem offenen Unterschema von X, es gilt $\psi_j \circ \varphi_{ji} = \psi_i$ auf U_{ij} für alle i,j, und es gilt: Ist T ein Schema, und ist für alle $i \in I$ ein Morphismus $\xi_i\colon U_i \to T$, gegeben, der einen Isomorphismen von U_i mit einem offenen Unterschema von T induziert, und gilt $\xi_j \circ \varphi_{ji} = \xi_i$ auf U_{ij} für alle $i,j \in I$, dann existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $\Xi\colon X \to T$ mit $\Xi \circ \psi_i = \xi_i$ für alle $i \in I$.

Insbesondere folgt daraus die Eindeutigkeitsaussage des Satzes. (Diese sieht man auch leicht direkt mit Hilfe des Satzes 3.7 über das Verkleben von Morphismen.)

Beweis. Wir definieren auf der disjunkten Vereinigung $\coprod_{i\in I} U_i$ der (zugrundeliegenden Mengen der) U_i eine Äquivalenzrelation $\sim$ und definieren X als die Menge der Äquivalenzklassen:

$$X := \coprod_{i\in I} U_i / \sim .$$

Die Kozykelbedingung stellt sicher, dass $\sim$ tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist. Die natürlichen Abbildungen $\psi_i\colon U_i \to X$ sind injektiv, und für alle $i,j \in I$ gilt $\psi_i(U_{ij}) = \psi_i(U_i) \cap \psi_j(U_j)$. Wir versehen $\psi_i(U_i)$ mittels der Bijektion ψ_i mit der Struktur eines topologischen Raums.

Als Topologie betrachten wir auf X die Quotiententopologie. In diesem Fall heißt das gerade, dass eine Teilmenge $U \subset X$ genau dann offen ist, wenn für alle i der Durchschnitt $U \cap \psi_i(U_i)$ offen in $\psi_i(U_i)$ ist. Da nach Voraussetzung $U_{ij} \subseteq U_i$ eine offene Teilmenge ist, sind die $\psi_i(U_i)$ (und alle ihre offenen Teilmengen) offen in X.

Um X zu einem lokal geringten Raum zu machen, müssen wir die Garben auf den U_i "verkleben". Die gesuchte Garbe $\mathscr{O}_X$ auf X ist eindeutig bestimmt durch die Schnitte (und Einschränkungsabbildungen) auf einer Basis der Topologie. Es genügt also, $\mathscr{O}_X(U)$ für offene Teilmengen $U \subset X$ zu definieren, die in einem $\psi_i(U_i)$ enthalten sind, und für solche U die Garbeneingenschaften nachzuweisen. (**??**: *Garbe zu einer auf Basis der Topologie gegebenen "Garbe"*) Wir setzen in diesem Fall $\mathscr{O}_X(U) = \mathscr{O}_{U_i}(\psi_i^{-1}(U))$. Ist $U \subseteq U_i \cap U_j$, so stimmten die Ringe $\mathscr{O}_{U_i}(\psi_i^{-1}(U))$ und $\mathscr{O}_{U_j}(\psi_j^{-1}(U))$ überein, denn beide werden durch φ_{ji} mit $\mathscr{O}_{U_{ij}}(U)$ identifiziert. Wir erhalten so eine Garbe von Ringen $\mathscr{O}_X$ auf X, und da alle U_i lokal geringte Räume sind, gilt das auch für $(X,\mathscr{O}_X)$.

Darüberhinaus sind die ψ_i Morphismen lokal geringter Räume; sie identifizieren U_i mit $(\psi_i(U_i),\mathscr{O}_{X|\psi_i(U_i)})$. Schließlich sind alle U_i Schemata, werden also als lokal geringte Räume durch affine Schemata überdeckt, deswegen gilt entsprechendes auch für X, und folglich ist X ein Schema.

Nach Konstruktion von X gilt auch $X = \bigcup U_i$. □

Referenz: [EGA $\mathrm{I}_{\mathrm{neu}}$, 2.4].

Als (trivialen) Spezialfall dieser Konstruktion können wir die disjunkte Vereinigung von Schemata (oder lokal geringten Räumen) verstehen. Wir setzen einfach $U_{ij} = \emptyset$ für alle i, j, und erhalten als zugrundeliegenden topologischen Raum tatsächlich die disjunkte Vereinigung der (topologischen Räume der) U_i. Die Strukturgarbe ist die "offensichtliche" Garbe. Wir bezeichnen die disjunkte Vereinigung mit $\coprod_{i\in I} U_i$.

Beispiele von Schemata

(3.7) Der projektive Raum.

Sei R ein Ring. Wir definieren den projektiven Raum $\mathbb{P}^n_R$ (über R) durch Verkleben von $n+1$ Kopien des affinen Raums $\mathbb{A}^n_R$. Um diese unterscheiden zu können, schreiben wir $U_i = \mathbb{A}^n_R$, $i = 0,\dots,n$. Demnach ist U_i das Spektrum eines Polynomrings in n Unbestimmten über R. Es ist nützlich, die Koordinaten $\frac{X_0}{X_i},\dots,\widehat{\frac{X_i}{X_i}},\dots,\frac{X_n}{X_i}$ zu verwenden, das heißt wir haben

$$U_i = \operatorname{Spec} R[\frac{X_0}{X_i},\dots,\widehat{\frac{X_i}{X_i}},\dots,\frac{X_n}{X_i}],$$

und können alle diese affinen Koordinatenringe als Teilringe des Rings $R[X_0,\dots,X_n,X_0^{-1},\dots,X_n^{-1}]$ auffassen.

Wir definieren ein Verklebedatum wie folgt: Für $0 \le i,j \le n$ sei $U_{ij} = D(T_j) \subset U_i$ falls $i \neq j$, und $U_{ii} = U_i$. Ferner sei $\varphi_{ii} = \mathrm{id}_{U_i}$ und für $i \neq j$ sei

$$\varphi_{ji} \colon U_{ij} \to U_{ji}$$

der durch die Gleichheit

$$R[T_0,\dots,\widehat{T_j},\dots,T_n]_{T_i} \to R[T_0,\dots,\widehat{T_i},\dots,T_n]_{T_j},$$

(als Unterringe von $R[X_0,\dots,X_n,X_0^{-1},\dots,X_n^{-1}]$) definierte Isomorphismus der affinen Schemata U_{ij} und U_{ji}. Da die φ_{ij} durch Gleichheiten gegeben sind, gilt die Kozykelbedingung, und wir erhalten aus dem Verklebedatum nach Satz **??** ein Schema, das wir mit $\mathbb{P}^n_R$ bezeichnen.

(3.8) Nullstellenmengen im projektiven Raum.

Sei wieder R ein Ring. Wie im vorhergehenden Abschnitt fassen wir $R[X_0,\dots,X_n]$ als graduierten Ring auf. Sei $I \subseteq R[X_0,\dots,X_n]$ ein homogenes Ideal, d. h. I werde erzeugt von homogenen Elementen, mit anderen Worten: $I = \bigoplus_d (I \cap R[X_0,\dots,X_n]_d)$. Wir wollen durch Verkleben ein Schema $V_+(I)$ konstruieren, das der gemeinsamen Nullstellenmenge der homogenen Polynome in I entspricht (vgl. Kapitel 1, **??**).

Sei wie oben $U_i = \operatorname{Spec} R[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \widehat{\frac{X_i}{X_i}}, \dots, \frac{X_n}{X_i}]$. Durch Dehomogenisieren bezüglich X_i erhalten wir aus jedem homogenen Polynom in I ein Element in $\Gamma(U_i, \mathscr{O}_{U_i})$. Das von diesen Elementen erzeugte Ideal bezeichnen wir mit $\Phi_i(I)$. Wir wollen die Schemata $V_i := \Gamma(U_i, \mathscr{O}_{U_i})/\Phi_i(I)$ verkleben entlang der offenen Unterschemata

$$V_{ij} = D(\frac{X_j}{X_i}).$$

Die Isomorphismen, die wir zum Verkleben der U_i benutzt haben, schränken sich auf diese Situation ein, denn ist $f \in I$ homogen vom grad d, so gilt für die Dehomogenisierungen

$$X_i^d \Phi_i(f) = X_j^d \Phi_j(f),$$

ist also $\frac{X_i}{X_j}$ invertierbar, so unterscheiden sich $\Phi_i(f)$ und $\phi_j(f)$ nur um eine Einheit. Im Koordinatenring von U_{ij} stimmen also die Ideale $\Phi_i(I)$ und $\Phi_j(I)$ überein, und das liefert die gesuchte Identifizierung $V_{ij} = V_{ji}$. Da die Kozykelbedingung für das durch die U_i, U_{ij} gegebene Verklebedatum galt, gilt sie auch in dieser Situation. Durch Verkleben erhalten wir ein Schema $V_+(i)$. Der zugrundeliegende topologische Raum ist eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{P}^n_R$.

Wir erhalten so eine große Anzahl von Beispielen von Schemata: wenn immer wir uns homogene Polynome über einem Ring vorgeben, können wir ihre “Nullstellenmenge” betrachten. In den nächsten Abschnitten wollen wir nun einige Eigenschaften von Schemata einführen, damit wir die Möglichkeit haben, diese Schemata zu untersuchen und anhand ihrer Eigenschaften zu unterscheiden.

Einfache Eigenschaften von Schemata

(3.9) Topologische Eigenschaften.

Definition 3.12.
(a) *Ein Schema heißt* zusammenhängend*, wenn der zugrundeliegende topologische Raum zusammenhängend ist.*
(b) *Ein Schema heißt* quasi-kompakt*, wenn der zugrundeliegende topologische Raum quasi-kompakt ist, d. h. wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.*

Wir haben bereits gesehen, dass alle affinen Schemata quasi-kompakt sind. Ein (triviales) Beispiel für ein Schema, das nicht quasi-kompakt ist, wäre die disjunkte Vereinigung von unendlich vielen Schemata. Es gibt aber auch zusammenhängende Schemata, die nicht quasi-kompakt sind; vergleiche Aufgabe **??**.

Definition 3.13. *Ein Schema heißt* irreduzibel*, wenn der zugrundeliegende topologische Raum irreduzibel ist, d. h. wenn er sich nicht als Vereinigung zweier echter abgeschlossener Teilmengen schreiben lässt.*

Definition 3.14. *Ein Morphismus $f\colon X \to Y$ von Schemata heißt* injektiv*,* surjektiv *bzw.* bijektiv*, wenn die zugrundeliegende stetige Abbildung $X \to Y$ diese Eigenschaft hat.*

Man beachte, dass ein bijektiver Morphismus von Schemata kein Isomorphismus sein muss.

(3.10) Noethersche Schemata.

Definition 3.15. *Ein Schema X heißt* lokal noethersch*, wenn X eine offene affine Überdeckung $X = \bigcup U_i$ besitzt, so dass alle affinen Koordinatenringe $\Gamma(U_i, \mathscr{O}_X)$ noethersch sind. Ist X zusätzlich quasi-kompakt, so heißt X* noethersch.

Da jede Lokalisierung eines noetherschen Rings wieder ein noetherscher Ring ist, besitzt jedes lokal noethersche Schema eine Basis der Topologie, die aus noetherschen affinen offenen Unterschemata besteht. Wir sehen auch, dass alle lokalen Ringe eines lokal noetherschen Schemas noethersch sind. Da affine Schemata stets quasi-kompakt sind, fallen in diesem Fall die Begriffe *noethersch* und *lokal noethersch* zusammen.

Lemma 3.16. *Sei $X = \operatorname{Spec} A$ ein noethersches affines Schema. Dann ist A ein noetherscher Ring.*

Beweis. Sei $I \subseteq A$ ein Ideal. Nach Voraussetzung wird $\operatorname{Spec} A$ durch endlich viele noethersche affine offene Unterschemata überdeckt. Lokalisierungen eines noetherschen Rings sind wieder noethersch, und mit Lemma 3.5 können wir voraussetzen, dass $\operatorname{Spec} A$ durch noethersche affine offene Unterschemata der Form $D(f_i)$, $f_i \in A$, $i = 1, \dots, n$ überdeckt wird. Sei $J_i = IA_{f_i}$, $i = 1, \dots, n$. Da die A_{f_i} noethersch sind, existiert ein endlich erzeugtes Ideal $J \subset A$, so dass $J \subseteq I$ und $JA_{f_i} = J_i$ für alle i. Der endlich erzeugte A-Modul I/J hat dann die Eigenschaft, dass alle Lokalisierungen $(I/J)_{\mathfrak{p}} \cong I/J \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$ an Primidealen $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ verschwinden, und ist folglich $= 0$, d. h. $I = J$ ist endlich erzeugt. □

Lemma 3.17. *Sei X ein (lokal) noethersches Schema und $U \subseteq X$ ein offenes Unterschema. Dann ist U (lokal) noethersch.*

Beweis. Im lokal noetherschen Fall ist das klar. Ist X noethersch, so ist insbesondere der zugrundeliegende topologische Raum noethersch, und daher jede offene Teilmenge quasi-kompakt. □

Lemma 3.18. *Sei X ein lokal noethersches Schema, und seien $U, V \subset X$ quasi-kompakte offene Teilmengen. Dann ist $U \cap V$ quasi-kompakt.*

Beweis. Da U quasi-kompakt ist, besitzt U eine endiche Überdeckung durch affine offene Teilmengen. Wir können uns dann auf den Fall einschränken, dass U selbst affin ist. In diesem Fall ist U das Spektrum eines noetherschen Rings, also insbesondere ein noetherscher topologischer Raum, und folglich ist jede offene Teilmenge quasi-kompakt (siehe Kapitel 1, **??**). □

(3.11) Generische Punkte.

Sei X ein Schema. In Kapitel 2 haben wir die folgende Sprechweise eingeführt. Ist Z eine Teilmenge von X, so heißt $z \in Z$ ein generischer Punkt, falls Z mit dem Abschluss von $\{z\}$ in X übereinstimmt. Offenbar ist die Teilmenge Z, wenn sie einen generischen Punkt besitzt, notwendigerweise abgeschlossen und irreduzibel.

In den Räumen, die als topologische Räume von Schemata auftreten, gilt darüberhinaus, dass jede abgeschlossene irreduzible Teilmenge einen eindeutig bestimmten generischen Punkt besitzt. Diese Tatsache ist der wesentliche Inhalt des folgenden Satzes:

Satz 3.19. *Die Zuordnung*

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \{Z \subseteq X;\ Z \textit{ abgeschlossen, irreduzibel}\} \\ x & \mapsto & \overline{\{x\}} \end{array}$$

ist eine Bijektion, d. h. jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge besitzt einen eindeutig bestimmten generischen Punkt.

Beweis. Wir wissen bereits, dass die entsprechende Eigenschaft für affine Schemata gilt. Ist nun $Z \subseteq X$ irreduzibel und abgeschlossen, und $U \subseteq X$ eine affine offene Teilmenge mit $Z \cap U \neq \emptyset$, so ist der Abschluss von $Z \cap U$ in X wieder Z, denn Z ist irreduzibel. Insbesondere ist $Z \cap U$ irreduzibel, und aus der Existenz eines generischen Punktes von $Z \cap U$ innerhalb von U folgt die Existenz eines generischen Punktes von Z innerhalt von X.

Ist $z \in Z$ ein generischer Punkt, so ist z in jeder offenen Teilmenge enthalten, die Z trifft, also auch in jedem beliebigen U wie oben, und es folgt die Eindeutigkeit generischer Punkte. □

Wie wir schon bei Prävarietäten und affinen Schemata gesehen haben, sind die topologischen Räume, die in der algebraischen Geometrie auftreten, in aller Regel nicht Hausdorffsch. Immerhin gilt die folgende Abschwächung der Hausdorff-Eigenschaft:

Lemma 3.20. *Sei X ein Schema. Dann ist der zugrundeliegende topologischer Raum X ein Kolmogorov-Raum, das heißt zu je zwei verschiedenen Punkten $x,y \in X$ existiert eine offene Teilmenge von X, die genau einen der Punkte enthält.*

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass X affin ist. Dann entsprechen die Punkte x und y Primidealen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ des affinen Koordinatenrings $\Gamma(X,\mathscr{O}_X)$. Gelte ohne Einschränkung, dass $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{q}$. Ist $f \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q}$, so ist $D(f)$ eine offene Teilmenge, die $\mathfrak{q}$, aber nicht $\mathfrak{p}$ enthält. □

Wir werden später eine Eigenschaft von Schemata kennenlernen, die der richtige Ersatz für die Hausdorff-Eigenschaft ist, nämlich die sogenannte Separiertheit.

(3.12) Reduzierte und integre Schemata.

Definition 3.21.
(a) *Ein Schema X heißt* reduziert*, wenn alle Halme $\mathscr{O}_{X,x}$, $x \in X$, reduzierte Ringe sind.*
(b) *Ein* integres Schema *ist ein Schema, das reduziert und irreduzibel ist.*

Lemma 3.22.
(1) *Ein Schema X ist genau dann reduziert, wenn für alle offenen Teilmengen $U \subseteq X$ der Ring $\Gamma(U,\mathscr{O}_X)$ reduziert ist.*
(2) *Ein Schema X ist genau dann integer, wenn für alle offenen Teilmengen $U \subseteq X$ der Ring $\Gamma(U,\mathscr{O}_X)$ ein Integritätsring ist.*

(3) *Ist X ein integres Schema, und ist $x \in X$, so ist der Halm $\mathscr{O}_{X,x}$ ein Integritätsring.*

Beweis. zu (1) Sei X reduziert, $U \subseteq X$ offen, und $f \in \Gamma(U,\mathscr{O}_X)$ mit $f^n = 0$. Ist $f \neq 0$, so existiert $x \in U$ mit $f_x \neq 0$ (in $\mathscr{O}_{X,x}$, aber $f_x^n = 0$.

Die Umkehrung ist ebenso einfach: Ist $\overline{f} \in \mathscr{O}_{X,x}$ ein nilpotentes Element $\neq 0$, so existiert $U \subseteq X$ offen, und ein Lift $f \in \Gamma(U,\mathscr{O}_X)$ von $\overline{f}$. Indem wir U gegebenenfalls verkleinern, können wir annehmen, dass f nilpotent, also $= 0$ ist.

zu (2) Sei X integer. Da alle offenen Unterschemata von X ebenfalls integer sind, genügt es zu zeigen, dass $\Gamma(X,\mathscr{O}_X)$ ein Integritätsring ist. Sind $f,g \in \Gamma(X,\mathscr{O}_X)$ mit $fg = 0$, so gilt $X = V(f) \cup V(g)$, also wegen der Irreduzibilität ohne Einschränkung $X = V(f)$. Wir wollen zeigen, dass $f = 0$ sein muss. Dazu können wir uns auf den Fall beschränken, dass X affin ist. Dann liegt f im Durchschnitt aller Primideale, also im Nilradikal des affinen Koordinatenrings. Da X reduziert ist, ist dies das Nullideal.

Sind andererseits alle $\Gamma(U,\mathscr{O}_X)$ Integritätsringe, so ist X nach (1) jedenfalls reduziert. Gäbe es nicht-leere offene Teilmengen $U_1,U_2 \subset X$ mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, so folgt aus den Garbenaxiomen, dass

$$\Gamma(U_1 \cap U_2,\mathscr{O}_X) = \Gamma(U_1,\mathscr{O}_X) \times \Gamma(U_2,\mathscr{O}_X)$$

ist. das Produkt auf der rechten Seite besitzt aber offenbar Nullteiler.

zu (3) Dies folgt leicht aus (2). □

Ein affines Schema $X = \operatorname{Spec} A$ ist genau dann integer, wenn A ein Integritätsring ist. Der generische Punkt η von X entspricht dann dem Nullideal von A, und der Halm $\mathscr{O}_{X,\eta}$ ist die Lokalisierung $A_{(0)}$, also der Quotientenkörper von A. Dies zeigt auch, dass der Halm im generischen Punkt eines beliebigen Schemas ein Körper ist.

Definition 3.23. *Sei X ein integres Schema, und sei $\eta \in X$ der generische Punkt. Dann ist der Halm $\mathscr{O}_{X,\eta}$ ein Körper, den wir den* Funktionenkörper *von X nennen und mit $K(X)$ bezeichnen.*

Der folgende Satz zeigt eine typische Schlussweise, die den generischen Punkt eines irreduziblen Schemas ausnutzt. Um eine Eigenschaft (hier: Reduziertheit des Halms) "generisch", d. h. für alle Punkte einer nicht-leeren offenen Teilmenge zu erhalten, müssen wir nur einen einzigen Halm untersuchen.

Satz 3.24. *Sei X ein noethersches irreduzibles Schema, und sei $\eta \in X$ der generische Punkt. Dann sind äquivalent:*
(i) *Der Halm $\mathscr{O}_{X,\eta}$ ist reduziert.*
(ii) *Es gibt ein nicht-leeres reduziertes offenes Unterschema $U \subseteq X$.*

Beweis. Sei $\mathscr{O}_{X,\eta}$ reduziert. Indem wir X durch einen offenen Teil ersetzen, können wir annehmen, dass $X = \operatorname{Spec} A$ affin ist. Dann ist A noethersch, und insbesondere ist das einzige minimale Primideal $\mathfrak{p}$ (das η entspricht) endlich erzeugt, etwa von $f_1, \dots, f_n \in A$. Es ist dann $\mathfrak{p} = \operatorname{rad}(A)$, und folglich sind die Bilder aller f_i in $\mathscr{O}_{X,\eta} = A_{\mathfrak{p}}$ alle $= 0$. Dann existiert aber $g \in A \setminus \mathfrak{p}$, so dass die Bilder aller f_i in der Lokalisierung A_g verschwinden. Man sieht dann leicht, dass A_g reduziert ist, also können wir $U := D(g)$ setzen.

Gibt es andererseits ein nicht-leeres reduziertes offenes Unterschema U in X, so ist $\eta \in U$ und $\mathscr{O}_{X,\eta} = \mathscr{O}_{U,\eta}$ reduziert. □

(3.13) Dimension.

Für Schemata ist der folgende Dimensionsbegriff ein guter Begriff:

Definition 3.25. *Sei X ein topologischer Raum. Die Dimension* $\dim X$ *von X ist das Supremum über die Längen aller absteigenden Ketten*

$$X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq \cdots \supsetneq X_l$$

irreduzibler abgeschlossener Teilmengen von X. (Die Länge einer Kette wie oben ist l.)

Die Dimension ist also eine nicht-negative ganze Zahl, oder unendlich.

Ist $X = \operatorname{Spec} A$ ein affines Schema, so haben wir eine inklusionsumkehrende Bijektion zwischen irreeduziblen abgeschlossenen Teilmengen von X und Primidealen von A. Die Dimension von X ist dann also das Supremum über alle Längen von Ketten von Primidealen, d. h. die sogenannte Krull-Dimension des Rings A.

Ist K ein Körper, so gilt $\dim \operatorname{Spec} K = 0$. Ist A ein Hauptidealring (aber kein Körper), so ist $\dim \operatorname{Spec} A = 1$. Insbesondere ist also $\dim \mathbb{A}^1_K = 1$ für jeden Körper K. Wie man erwarten wird, gilt auch $\dim \mathbb{A}^n_K = n$ für alle n; dies ist aber nicht ganz leicht zu zeigen. Mit diesem Ergebnis und dem noetherschen Normalisierungssatz ist es dann nicht schwer zu zeigen, dass für eine endlich erzeugte integre K-Algebra A gilt: $\dim \operatorname{Spec} A = \operatorname{trdeg}_k A$. Wir werden später auf diese Fragen zurückkommen **??**.

Schon jetzt sei aber eine Warnung angefügt: selbst für noethersche Schemata ist der Dimensionsbegriff nicht immer leicht zu handhaben, und es gibt Fälle, in denen er der Intuition entgegenläuft. Schränkt man sich allerdings auf integre Schemata von endlichem Typ über einem Körper ein (siehe unten), so entspricht der Dimensionsbegriff weitgehend den Erwartungen und ist sehr hilfreich.

Prävarietäten als Schemata

Der Begriff des Schemas ist in gewissen Sinne eine Verallgemeinerung des Begriffs der Prävarietät, den wir im ersten Kapitel definiert haben. Allerdings ist es nicht so, dass Prävarietäten tatsächlich Schemata sind—ihnen fehlen gerade die generischen Punkte für irreduzible abgeschlossene Teilmengen, die aus mehr als einem Punkt bestehen. Wir können aber jeder Prävarietät in natürlicher Weise ein Schema zuordnen. Im Falle affiner Varietäten sollte sicher der affinen Varietät mit Koordinatenring A das Schema $\operatorname{Spec} A$ entsprechen. Die Aufgabe der folgenden Abschnitte ist es, eine entsprechende Zuordnung im allgemeinen Fall vorzunehmen, und zu charakterisieren, welche Schemata wir in dieser Weise erhalten.

(3.14) Morphismen von endlichem Typ.

Ist A der Koordinatenring einer affinen Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k, so ist A eine endlich erzeugte k-Algebra. Der Begriff des Morphismus von endlichem Typ ist die Verallgemeinerung dieser Eigenschaft auf Schemata.

Definition 3.26. *Ein Morphismus $f\colon X \to Y$ von Schemata heißt* quasi-kompakt*, wenn für alle quasi-kompakten offenen Teilmengen $V \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(V)$ wieder quasi-kompakt ist.*

Diese Eigenschaft lässt sich auf einer affinen Überdeckung überprüfen, denn es gilt:

Lemma 3.27. *Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus, und sei $Y = \bigcup V_i$ eine affine offene Überdeckung, so dass für alle i die offene Teilmenge $f^{-1}(V_i)$ quasi-kompakt ist. Dann ist f quasi-kompakt.*

Beweis. Sei $V \subseteq Y$ eine quasi-kompakte offene Teilmenge. Wir müssen zeigen, dass $f^{-1}(V)$ quasi-kompakt ist. Da endliche Vereinigungen von quasi-kompakten Mengen wieder quasi-kompakt sind, genügt es den Fall zu betrachten, dass V von der Form $D(g) \subseteq V_i$, $g \in \Gamma(V_i,\mathscr{O}_Y)$, i geeignet, ist. Wir können $f^{-1}(V_i)$ als endliche Vereinigung von affinen offenen Teilmengen von X schreiben, etwa $f^{-1}(V_i) = \bigcup_{j=1}^{n} U_{ij}$. Sei $\varphi_j\colon \Gamma(V_i,\mathscr{O}_Y) \to \Gamma(U_{ij},\mathscr{O}_X)$ der durch die Einschränkung $U_{ij} \to V_i$ induzierte Ringhomomorphismus. Wir sehen nun, dass

$$f^{-1}(V) = \bigcup_j D_{U_{ij}}(\varphi_j(g))$$

tatsächlich eine endliche Vereinigung von affinen Schemata, also insbesondere quasi-kompakt ist. □

Definition 3.28. *Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. Wir sagen, f sei* lokal von endlichem Typ*, wenn sich für alle affinen offenen Teilmengen $V \subseteq Y$ und alle affinen offenen Teilmengen $U \subseteq f^{-1}(V)$ die $\Gamma(V,\mathscr{O}_Y)$-Algebra $\Gamma(U,\mathscr{O}_X)$ endlich erzeugt ist. Ist f zusätzlich quasi-kompakt, so heißt f* von endlichem Typ*.*

Man sagt auch, X sei ein Y-Schema von endlichem Typ, oder X sei von endlichem Typ über Y. Man kan zeigen, dass $f\colon X \to Y$ schon dann lokal von endlichem Typ ist, wenn eine Überdeckung von Y durch affine offene Teilmengen V_i existiert, und für alle i das Urbild $f^{-1}(V_i)$ durch affine offene Teilmengen U_{ij} überdeckt werden kann, so dass für alle i und j die $\Gamma(V_i,\mathscr{O}_Y)$-Algebra $\Gamma(U_{ij},\mathscr{O}_X)$ endlich erzeugt ist; siehe Kapitel **??**. Wir begnügen und hier damit, den Fall $Y = \operatorname{Spec} k$ zu betrachten und beginnen mit einem Lemma.

Lemma 3.29. *Sei A ein Ring und B eine A-Algebra. Seien $f_1,\dots,f_n \in B$ Elemente mit $(f_1,\dots,f_n) = (1)$ und so dass für alle i die Lokalisierung B_{f_i} eine endlich erzeugt A-Algebra ist. Dann ist B eine endlich erzeugte A-Algebra.*

*Beweis.*Nach Voraussetzung existieren $g_i \in B$ mit $\sum_i g_i f_i = 1$. Außerdem sind alle B_{f_i} endlich erzeugt, es existieren also endlich viele Elemente b_{ij}, die B_{f_i} als A-Algebra erzeugen. Wir schreiben $b_{ij} = c_{ij}/f_i^N$.

Sei nun C die von allen Elementen g_i, f_i, c_{ij} erzeugte A-Unteralgebra von B. Es genügt dann zu zeigen, dass $C = B$. Sei dazu $b \in B$. Jedenfalls ist für ein genügend großes N' und alle i dann $f_i^{N'} b \in C$. Daraus folgt aber $b = (\sum_i g_i f_i)^{N''} b \in C$, für N'' hinreichend groß. □

Satz 3.30. *Sei $f\colon X \to Y = \operatorname{Spec} k$ ein Morphismus von Schemata, und sei $X = \bigcup_i U_i$ eine affine offene Überdeckung, so dass für alle i die k-Algebra $\Gamma(U_i,\mathscr{O}_X)$ endlich erzeugt ist. Dann ist f lokal von endlichem Typ.*

Beweis. Sei $U \subseteq X$ eine affine offene Teilmenge. Wir müssen zeigen, dass $\Gamma(U,\mathscr{O}_X)$ eine endlich erzeugte k-Algebra ist. Da die Lokalisierung einer endlich erzeugten k-Algebra nach einem Element wieder endlich erzeugt ist, können wir (mit Lemma 3.5) voraussetzen, dass U von endlich vielen ausgezeichneten offenen Teilmengen $D(f)$, $f \in \Gamma(U,\mathscr{O}_X)$ überdeckt wird, so dass alle Lokalisierungen $\Gamma(U,\mathscr{O}_X)_f$ endlich erzeugte k-Algebren sind. Die Behauptung folgt dann direkt aus dem vorherigen Lemma. □

Satz 3.31. *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, und sei X ein k-Schema von endlichem Typ. Dann stimmt die Menge der abgeschlossenen Punkte in X überein mit der Menge der Punkte mit Restklassenkörper k. Mittels Satz* **??** *steht diese Menge in Bijektion zur Menge* $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}\, k,X)$.

Beweis. Wir wissen (als Konsequenz aus dem Hilbertschen Nullstellensatz, siehe Kapitel 1, **??**), dass alle abgeschlossenen Punkte Restklassenkörper k haben. Um den Satz zu beweisen, genügt es daher zu zeigen, dass für alle nicht abgeschlossenen Punkte $x \in X$ der Restklassenkörper ein echter Erweiterungskörper von k ist. Da x nicht abgeschlossen ist, existiert eine affine offene Teilmenge $U = \mathrm{Spec}\, A$ von X, die x enthält, und in der x ebenfalls nicht abgeschlossen ist. Das heißt gerade, dass x einem Primideal $\mathfrak{p}$ entspricht, das nicht maximal ist. Insbesondere ist $A/\mathfrak{p}$ kein Körper, und die natürliche Abbildung $k \to \mathrm{Quot}(A/\mathfrak{p}) = \kappa(x)$ ist eine echte Inklusion. Es ist aber sogar so, dass $\kappa(x)$ nicht algebraisch abgeschlossen, und mithin nicht einmal abstrakt isomorph ist zu k: Nach dem Noetherschen Normalisierungssatz (Kapitel 1, **??**) ist $A/\mathfrak{p}$ endlich über einem Polynomring $k[X_1,\dots,X_n]$, und nach Lemma **??** in Kapitel 1 ist $n > 0$. Daher ist $\kappa(x)$ eine endliche Körpererweiterung eines rationalen Funktionenkörpers $k(X_1,\dots,X_n)$, $n > 0$, und insbesondere nicht algebraisch abgeschlossen. □

Beachte, dass es im allgemeinen durchaus vorkommen kann, dass ein Punkt x eines Schemas X eine offene Umgebung besitzt, in der x abgeschlossen ist, obwohl x innerhalb von X nicht abgeschlossen ist. Als forlgerung aus dem Satz erhalten wir aber, dass das in einem Schema von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper nicht vorkommen kann. (Man kann in ähnlicher Weise zeigen, dass das für Schemata von endlichem Typ über irgendeinem Körper richtig ist.)

(3.15) Sehr dichte Teilmengen.

Definition 3.32. *Eine Teilmenge Y eines topologischen Raums X heißt* sehr dicht*, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:*

(i) *Die Zuordnung $U \mapsto U \cap Y$ definiert eine Bijektion zwischen der Menge der offenen Teilmengen von X und der Menge der offenen Teilmengen von Y.*
(ii) *Die Zuordnung $Z \mapsto Z \cap Y$ definiert eine Bijektion zwischen der Menge der abgeschlossenen Teilmengen von X und der Menge der abgeschlossenen Teilmengen von Y.*
(iii) *Für jede abgeschlossene Teilmenge $Z \subseteq X$ gilt $Z = \overline{Z \cap Y}$.*
(iv) *Jede nicht-leere lokal abgeschlossene Teilmenge von X enthält einen Punkt von Y.*

Dass diese Eigenschaften tatsächlich äquivalent sind, folgt aus einer einfachen Überlegung über mengentheoretische Topologie.

Satz 3.33. *Sei X ein Schema von endlichem Typ über dem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Dann liegt die Menge der abgeschlossenen Punkte sehr dicht im topologischen Raum X.*

Beweis. Wir zeigen, dass jede nicht-leere lokal abgeschlossene Teilmenge von X einen abgeschlossenen Punkt enthält. Indem wir die Teilmenge gegebenenfalls etwas verkleinern, können wir annehmen, dass sie ein abgeschlossener Teil einer affinen offenen Teilmenge $U = \operatorname{Spec} A$ von X ist. Unsere Voraussetzung impliziert dann, dass A eine endlich erzeugte k-Algebra ist. Jede abgeschlossene Teilmenge hat die Form $V(\mathfrak{a})$ für ein Ideal A, und da $V(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$, ist $\mathfrak{a}$ in einem maximalen Ideal von A enthalten. Jedenfalls enthält $V(\mathfrak{a})$ also einen abgeschlossenen Punkt von $\operatorname{Spec} A$. Wir wissen aber wegen Satz **??**, dass in unserer Situation alle abgeschlossenen Punkte von $\operatorname{Spec} A$ auch in X abgeschlossen sind, und der Satz ist damit bewiesen. □

Wir haben gesehen, dass in dem zugrundeliegende topologische Raum eines Schemas jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge einen eindeutig bestimmten generischen Punkt hat. Diese Eigenschaft ist gewissermaßen der entscheidende Unterschied zwischen integren Schemata von endlichem Typ über k und Prävarietäten (im Sinne von Kapitel 1) über k: in Prävarietäten sind alle Punkt abgeschlossen. Um die gewünschte Äquivalenz von Kategorien herzustellen, würden wir gerne aus jeder Prävarietät einen lokal geringten Raum machen, in dessen zugrundeliegendem topologischen Raum jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge einen eindeutig bestimmten generischen Punkt hat. Dazu betrachten wir die folgende Konstruktion:

Sei X ein topologischer Raum, in dem alle Punkte abgeschlossen sind. Wir definieren einen topologischen Raum $t(X)$ wie folgt: Als Menge ist $t(X)$ die Menge aller irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von X. Wir haben also eine Inklusion $X \to t(X)$, aber in aller Regel ist X eine echte Teilmenge von $t(X)$.

Wir definieren eine Topologie auf $t(X)$: Ist $Z \subseteq X$ offen, so ist $t(Z)$ eine Teilmenge von $t(X)$. Per Definition seien die abgeschlossenen Teilmengen von $t(X)$ die Teilmengen der Form $t(Z)$, $Z \subseteq X$ offen. Da $t(\bigcap_i Z_i) = \bigcap t(Z_i)$ und $t(Z_1 \cup Z_2) = t(Z_1) \cup t(Z_2)$ für abgeschlossene Teilmengen Z_1,Z_2,$Z_i \subseteq X$, bilden diese Mengen tatsächlich die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $t(X)$. Ist $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung, so erhalten wir eine stetige Abbildung $t(f)\colon t(X) \to t(Y)$, indem wir jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge von X auf den Abschluss ihres Bildes unter f, aufgefasst als Element von $t(Y)$, abbilden. Insgesamt haben wir einen Funktor von der Kategorie der topologischen Räume in sich definiert. Jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge von $t(X)$ ist von der Form $t(Z)$ für $Z \subseteq X$ abgeschlossen und irreduzibel, und hat den Punkt $Z \in t(X)$ als eindeutig bestimmten generischen Punkt.

Ist X gegeben, so haben wir eine natürliche Abbildung $\alpha_X\colon X \to t(X)$, die jeden Punkt von X auf seinen Abschluss abbildet. Die Zuordnung $U \mapsto \alpha_X^{-1}(U)$ ist eine Bijektion zwischen der Menge der offenen Teilmengen von $t(X)$ und der Menge der offenen Teilmengen von X.

(3.16) Prävarietäten als Schemata.

Wir wissen bereits, dass die folgenden Kategorien äquivalent sind:

- die Kategorie der integren affinen Schemata von endlichem Typ über k
- die Kategorie der integren endlich erzeugten k-Algebren

- die Kategorie der affinen Varietäten (im Sinne von Kapitel 1, **??**)

Diese Äquivalenz von Kategorien wollen wir nun folgendermaßen ausdehnen:

Satz 3.34. *Die folgenden Kategorien sind äquivalent:*
- *die Kategorie der integren Schemata von endlichem Typ über k*
- *die Kategorie der Prävarietäten (im Sinne von Kapitel 1,* **??***)*

Beweis. Wir beginnen mit der Konstruktion des Funktors von der Kategorie der integren Schemata von endlichem Typ über k in die Kategorie der Prävarietäten über k. Sei X ein solches Schema, und sei X_0 die Menge der abgeschlossenen Punkte von X, aufgefasst als topologischer Raum mit der Teilraumtopologie. Da X_0 sehr dicht in X liegt, haben alle offenen Teilmengen von X_0 die Form $U \cap X_0$ für eine offene Teilmenge $U \subseteq X$. Wir erhalten also eine Garbe $\mathscr{O}_{X_0}$ auf X_0, indem wir setzen

$$\mathscr{O}_{X_0}(U \cap X_0) = \mathscr{O}_X(U).$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\mathscr{O}_{X_0}$ mit Einschränkungsabbildungen ausgestattet ist, und dass die Garbenaxiome erfüllt sind. Wir wollen zeigen, dass wir Inklusionen

$$\mathscr{O}_{X_0}(U \cap X_0) \hookrightarrow \mathrm{Abb}(U \cap X_0, k)$$

haben, so dass die Restriktionsabbildungen der Garbe $\mathscr{O}_{X_0}$ durch die Einschränkung von Abbildungen gegeben sind. Das bedeutet, dass wir X_0 zu einem Raum mit Funktionen gemacht haben.

Ist $f \in \mathscr{O}_{X_0}(U \cap X_0) = \mathscr{O}_X(U)$, so ordnen wir f die Abbildung

$$U \cap X_0 \longrightarrow k, \quad x \mapsto f(x) := \pi_x(f),$$

zu, wobei π_x die natürliche Abbildung $\pi_x \colon \mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{O}_{X,x} \to \kappa(x) = k$ bezeichnet. Die Einschränkung von Schnitten entspricht dann genau der Einschränkung von Funktionen. Wir müssen noch zeigen, dass Elemente $f,g \in \mathscr{O}_{X_0}(U \cap X_0)$ mit derselben zugehörigen Abbildung $U \cap X_0 \longrightarrow k$ notwendigerweise übereinstimmen. Das können wir aber lokal auf U überprüfen, und daher annehmen, dass $U = \operatorname{Spec} A$ affin ist. Dann besagt die Voraussetzung, dass für die Elemente $f,g \in A$ gilt: $\pi_x(f) = \pi_x(g)$ für jeden abgeschlossenen Punkt $x \in \operatorname{Spec} A$, mit anderen Worten:

$$f - g \quad \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \subset A \\ \text{maximales Ideal}}} \mathfrak{m} = \mathrm{rad}(A) = 0,$$

da A eine k-Algebra von endlichem Typ und reduziert ist.

Da X durch endlich viele affinen Schemata überdeckt werden, die jeweils das Spektrum einer integren endlich erzeugten affinen k-Algebra sind, folgt leicht, dass der so definierte Raum mit Funktionen X_0 eine Prävarietät ist.

Weil unter einem Morphismus von Schemata von endlichem Type über k abgeschlossene Punkte stets auf abgeschlossene Punkte abgebildet werden (Satz 3.31), ist unsere Konstruktion funktoriell.

Nun zum quasi-inversen Funktor. Sei X eine Prävarietät. Sei $\alpha_X \colon X \to t(X)$ die oben betrachtete natürliche Abbildung. Wir betrachten das System von Funktionen $\mathscr{O}_X$ als Garbe auf X. Dann ist $(t(X), \alpha_{X,*}\mathscr{O}_X)$ ein lokal geringter Raum. Ist X eine affine Prävarietät mit affinem Koordinatenring A, so können wir den topologischen Raum X mit der Menge der maximalen Ideale von A mit der Zariski-Topologie identifizieren, und $t(X)$ ist dann homöomorph zu $\operatorname{Spec} A$. Da $\mathscr{O}_X(D(f)) = A_f$ für alle $f \in A$, ist unsere Behauptung in diesem Fall richtig, und der allgemeine Fall folgt leicht, indem man X durch affine offene Teile überdeckt.

Ist $f\colon X \to Y$ ein Morphismus von Prävarietäten, so erhalten wir durch Funktorialität eine stetige Abbildung $t(f)\colon t(X) \to t(Y)$ und einen Garbenhomomorphismus $\alpha_{Y,*}\mathscr{O}_Y \to t(f)_*\alpha_{X,*}\mathscr{O}_X$. Da der Morphismus zwischen den "Garben" auf X und Y durch Verkettung von Funktionen gegeben ist, erhalten wir so einen Morphismus lokal geringter Räume.

Da wir sowohl affine Prävarietäten als auch affine Schemata mit ihrem Koordinatenring identifizieren können, überzeugt man sich leicht, dass die so definierten Funktoren quasi-invers zueinander sind. □

Lemma 3.35. *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, und sei X ein integres Schema von endlichem Typ über k. Sei X_0 die zu X gehörige Prävarietät. Dann stimmen die rationalen Funktionenkörper $K(X)$ und $K(X_0)$ überein.*

Wegen Satz 3.31 können wir zu einem integren k-Schema X von endlichem Typ die Menge der abgeschlossenen Punkte, und damit die der zugehörigen Prävarietät zugrundeliegende Menge identifizieren mit der Menge $X(k) := \mathrm{Hom}_k(\operatorname{Spec} k, X)$ der sogenannten k-wertigen Punkte. Wir sehen auch, dass diese Bezeichnungsweise mit den im ersten Kapitel verwendeten Bezeichnungen $\mathbb{A}^n(k)$, $\mathbb{P}^n(k)$ zusammenpasst.

In Kapitel 7 über den sogenannten funktoriellen Standpunkt werden wir sehen, dass man im allgemeinen ein Schema X zwar (offenbar) nicht durch die Menge $X(k)$ seiner k-wertigen Punkte charakterisieren kann, aber doch, wenn man alle Mengen $X(R) := \mathrm{Hom}(\operatorname{Spec} R, X)$ von R-wertigen Punkten, R ein Ring, zusammennimmt (und als Funktor von der Kategorie der Ringe in die Kategorie der Schemata auffasst).

Rationale Abbildungen, Funktionenkörper

FEHLT.

Nicht algebraisch abgeschlossene Grundkörper

FEHLT.

Übungsaufgaben

Aufgabe 1. Zeige, dass man abzählbar unendlich viele Kopien der affinen Gerade $\mathbb{A}^1_k$ (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k), die indiziert werden durch $\mathbb{Z}$, so zu einem Schema zusammenfügen kann, dass sich jeweils die Kopien zu i und $i+1$ in einem Punkt schneiden, und zwar so dass der Schnittpunkt, aufgefasst als Element der i-ten Kopie, gerade der abgeschlossene Punkt 0, und als Element der $(i+1)$-ten Kopie gerade der Punkt 1 ist.

Zeige, dass das so erhaltene Schema nicht quasi-kompakt ist.

Aufgabe 2◊. Seien k, k' Körper unterschiedlicher Charakteristik. Sei X ein nichtleeres k-Schema und X' ein nichtleeres k'-Schema. Zeige, dass es keinen Morphismus $X \to X'$ von Schemata geben kann.

Aufgabe 3◊. Gib ein nicht noethersches Schema an, dessen topologischer Raum noethersch ist.

Aufgabe 4.
(a) Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von integren Schemata, der dominant ist, d. h. dass $f(X)$ dicht in Y ist. Zeige, dass f eine Inklusion $K(Y) \longrightarrow K(X)$ der Funktionenkörper induziert.
(b) Sei X ein integres Schema, $x \in X$. Zeige, dass der natürliche Morphismus $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow X$ dominant ist, und dass wir so $\mathcal{O}_{X,x}$ auf natürliche Weise als Unterring von $K(X)$ auffassen können. Ist nun $U \subseteq X$ eine nichtleere, offene Teilmenge, so ist $\eta \in U$ und wir erhalten eine Abbildung $\Gamma(U,\mathcal{O}_X) \longrightarrow K(X)$. Zeige, dass diese Abbildung injektiv ist, und dass gilt:
$$\Gamma(U,\mathcal{O}_X) = \bigcap_{x\in U} \mathcal{O}_{X,x}.$$

Aufgabe 5. Sei X ein Schema. Zeige, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:
(i) X ist zusammenhängend.
(ii) Es existiert in $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ kein Element $e \neq 0{,}1$ mit $e^2 = e$.
(iii) Es existiert keine Zerlegung $\Gamma(X,\mathcal{O}_X) = R_1 \times R_2$ in von Null verschiedene Ringe R_1, R_2.

Aufgabe 6.
(a) Sei X ein quasi-kompaktes Schema. Zeige, dass X einen abgeschlossenen Punkt besitzt.
(b) Sei X ein quasi-kompaktes Schema, das genau einen abgeschlossenen Punkt hat. Zeige, dass X isomorph ist zum Spektrum eines lokalen Ringes.

Aufgabe 7.
(a) Sei X ein Schema, $x \in X$. Sei ferner $\mathfrak{m} \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$ das maximale Ideal des lokalen Rings in x. Dann ist $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ein $\kappa(x)$-Vektorraum, und wir bezeichnen mit $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$ seinen Dualraum. Der Raum $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$ heißt der *Zariski-Tangentialraum* von X in x und wird auch mit $T_{X,x}$ bezeichnet.

Sei nun k ein Körper, X ein k-Schema und $x \in X$ ein Punkt mit Restklassenkörper $\kappa(x) = k$. Sei $Z := \operatorname{Spec} k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$. Sei $z \in Z$ der einzige Punkt von Z. Sei $\varphi \in (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$. Zeige, dass es einen eindeutig bestimmten k-Algebrenhomomorphismus $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ gibt, dessen Einschränkung auf $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ die Form $m \mapsto \varepsilon\varphi(m)$ hat. Zeige, dass man so eine Bijektion
$$(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^* \longrightarrow \{f \in \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} k}(Z,X);\ f(z) = x\}$$
erhält.
(b) Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Gib Beispiele von k-Schemata X, Y, Z an, so dass alle drei Schemata denselben zugrundliegenden topologischen Raum wie $\mathbb{A}^1_k$ haben, und so dass
- für alle abgeschlossenen Punkte von X gilt: $\dim T_{X,x} = 1$,
- für alle bis auf einen abgeschlossenen Punkt von Y gilt: $\dim T_{Y,y} = 1$,
- für alle abgeschlossenen Punkte von Z gilt: $\dim T_{Z,z} > 1$,