Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz **WS 2007/08**

Übungen zur Algebraischen Geometrie 2

Blatt 10, Abgabe am 8.1.2008

Aufgabe 37

Sei $R \to R'$ ein treuflacher Ringhomomorphismus. Zeige, dass der Funktor in Aufgabe 33 b) eine Äquivalenz von Kategorien ist.

Hinweis: Ist M' mit einem Abstiegsdatum $\varphi\colon p_1^*M' \xrightarrow{\cong} p_2^*M'$ gegeben, so definiere $\alpha\colon M' \to M' \otimes_{R'} R^{(2)}$ durch $m \mapsto m - \varphi^{-1}(m)$. Definiere $M := \ker \alpha$ und verwende Aufgabe 30.

Aufgabe 38

Sei $(X, \mathscr{O}_X)$ ein geringter Raum. Für $\mathscr{O}_X$-Moduln $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ sei $\mathscr{H}om(\mathscr{F},\mathscr{G})$ die Garbe

$$U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{F}_{|U}, \mathscr{G}_{|U}).$$

Wir definieren die Garben-Ext-Funktoren $\mathscr{E}xt^i(\mathscr{F}, -)$ als die Rechtsableitungen des linksexakten (!) kovarianten Funktors $\mathscr{H}om(\mathscr{F}, -)$ von $\mathscr{O}_X$-Mod nach $\mathscr{O}_X$-Mod. Die abelschen Gruppen $\mathrm{Ext}^i(\mathscr{F},\mathscr{G})$ sind entsprechend durch die Ableitung von $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, -)$ definiert.

a) Seien $\mathscr{F}$ ein flacher und $\mathscr{J}$ ein injektiver $\mathscr{O}_X$-Modul. Zeige: $\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathscr{J})$ ist injektiv. *Hinweis:* Zeige zunächst, dass

$$\mathrm{Hom}(-, \mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathscr{J})) \cong \mathrm{Hom}(- \otimes \mathscr{F}, \mathscr{J}).$$

b) Sei $(X, \mathscr{O}_X)$ ein geringter Raum, und seien $\mathscr{O}_X$-Moduln $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ gegeben. Zeige: Es gibt eine Spektralsequenz

$$H^p(X, \mathscr{E}xt^q(\mathscr{F},\mathscr{G})) \Longrightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(\mathscr{F},\mathscr{G}).$$

Hinweis: Es ist zu zeigen, dass $H^i(X, \mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathscr{J})) = 0$ für injektive $\mathscr{O}_X$-Moduln $\mathscr{J}$. Wähle dazu eine kurze exakte Sequenz $0 \to \mathscr{A} \to \mathscr{B} \to \mathscr{F} \to 0$ mit $\mathscr{B}$ flach, und betrachte die lange exakte Kohomologiesequenz zur exakten (!) Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathscr{H}om(\mathscr{F}, \mathscr{J}) \longrightarrow \mathscr{H}om(\mathscr{B}, \mathscr{J}) \longrightarrow \mathscr{H}om(\mathscr{A}, \mathscr{J}) \longrightarrow 0.$$

Aufgabe 39

Sei X ein noethersches Schema, X_{red} das zugrundeliegende reduzierte abgeschlossene Unterschema. Zeige: X ist genau dann affin, wenn X_{red} affin ist.

Aufgabe 40

Sei $f\colon X \to Y$ ein quasi-kompakter Morphismus von Schemata, so dass der zugehörige Diagonalmorphismus $\Delta\colon X \to X \times_Y X$ ebenfalls quasi-kompakt ist. Sei $\mathscr{F}$ ein quasi-kohärenter $\mathscr{O}_X$-Modul. Zeige, dass $f_*\mathscr{F}$ ein quasikohärenter $\mathscr{O}_Y$-Modul ist.