Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz **WS 2007/08**

Übungen zur Algebraischen Geometrie 2

Blatt 13, Abgabe am 29.1.2008

Aufgabe 49

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $\neq 2, 3$ und sei $F \in k[X, Y, Z]$ ein homogenes Polynom der Form

$$F = Y^2Z - X^3 - AXZ^2 - BZ^3, \qquad A, B \in k.$$

Zeige: das abgeschlossene Unterschema $V_+(F)$ von $\mathbb{P}^2_k$ ist genau dann glatt über k, wenn das Polynom $X^3 + AX + B$ keine mehrfachen Nullstellen hat. Zeige, dass es jedenfalls höchstens einen Punkt gibt, in dem $V_+(F)$ nicht glatt ist.

Aufgabe 50

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper, C eine glatte projektive Kurve über k. Sei $g = \dim H^1(C, \mathscr{O}_C)$ das Geschlecht von C.

a) $\dim H^0(X, \omega_X) = g$.

b) $\deg \omega_X = 2g - 2$.

c) Ist $D \in \mathrm{Div}(C)$ mit $\deg D > 2g-2$, so gilt $\dim H^0(C, \mathscr{O}(D)) = \deg D - g + 1$.

d) Ist $g = 0$, so ist $C \cong \mathbb{P}^1_k$ (*Hinweis:* Aufgabe 29).

Aufgabe 51

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper, und E eine glatte projektive Kurve über k vom Geschlecht $g = \dim H^1(E, \mathscr{O}_E) = 1$, zusammen mit einem Punkt $o \in E(k)$. Für Geradenbündel $\mathscr{O}(D)$, $D \in \mathrm{Div}(E)$ fassen wir $H^0(E, \mathscr{O}(D))$ wie in Aufgabe 43 als Teilmenge von $K(E)$ auf.

a) Es existieren Funktionen $x, y \in K(E)$ so dass $1, x$ eine Basis von $H^0(E, \mathscr{O}(2[o]))$ und $1, x, y$ eine Basis von $H^0(E, \mathscr{O}(3[o]))$ ist.

b) Seien x, y wie in a). In $H^0(E, \mathscr{O}(6[o]))$ gilt eine Gleichung der Form $f(x, y) = 0$ für ein Polynom

$$f(X, Y) = A_0 + A_2X + A_3Y + A_4X^2 + A_5XY + A_6Y^2 + A_6'X^3 \in k[X, Y]$$

mit $A_i, A_6' \in k$ und $A_6A_6' \neq 0$.

c) Sei F das homogene Polynom vom Grad 3 in $k[X, Y, Z]$, das wir aus f durch Homogenisieren bezüglich Z erhalten. Die Vorschrift

$$p \mapsto (x(p) : y(p) : 1)$$

definiert einen Morphismus $\varphi\colon E \to \mathbb{P}^2_k$ mit Bild $V_+(F)$. Es gilt $\varphi(0) = (0:1:0)$.

Bemerkung. Man kann zeigen, dass φ ein Isomorphismus $E \xrightarrow{\cong} V_+(F)$ ist. (Eine Möglichkeit ist, zu zeigen, dass $\mathscr{O}(3[o])$ sehr ampel ist, vgl. [H] Cor. IV.3.2. Für einen direkten Ansatz siehe [S] Prop. III.3.1 (a).) Durch einen Koordinatenwechsel kann man erreichen, dass die Gleichung F die Form in Aufgabe 49 hat, sofern der Körper k nicht Charakteristik 2 oder 3 hat. Aus Aufgabe 36 folgt, dass alle glatten projektiven Kurven, die durch eine Gleichung dieser Form ("Weierstraß-Gleichung") gegeben sind, Geschlecht 1 haben.

Aufgabe 52

Seien k, E, $o \in E(k)$ wie in Aufgabe 51. Sei $\mathrm{Div}^0(E)$ die Gruppe der Divisoren vom Grad 0, $\mathrm{Pic}^0(E)$ die Gruppe der Geradenbündel vom Grad 0 (vgl. Aufgabe 43).

Für Divisoren $D, D' \in \mathrm{Div}(E)$ schreiben wir $D \sim D'$ (und nennen D, D' linear äquivalent), wenn die zugehörigen Geradenbündel $\mathscr{O}(D)$, $\mathscr{O}(D')$ isomorph sind.

a) Für jedes $D \in \mathrm{Div}^0(E)$ existiert ein eindeutig bestimmter Punkt $p \in E(k)$ mit $D \sim [p] - [o]$. Sei $\sigma\colon \mathrm{Div}^0(E) \to E(k)$ die zugehörige Abbildung.

b) Die Abbildung σ aus a) ist surjektiv.

c) Ist $f \in K(E)^\times$ und $\mathrm{div}(f)$ der zugehörige Divisor, so gilt $\sigma(\mathrm{div}(f)) = \mathscr{O}$, und die induzierte Abbildung $\mathrm{Pic}^0(E) \to E(k)$ ist bijektiv.

Bemerkung. Für Hinweise vergleiche [S] Prop. III.3.4. Insbesondere zeigt Teil c) der Aufgabe, dass die Menge $E(k)$ die Struktur einer abelschen Gruppe trägt. Man kann zeigen, dass diese induziert wird von Morphismen $E \times E \to E$ (Multiplikation), $E \to E$ (Inverses) und $\mathrm{Spec}\, k \to E$ (neutrales Element) algebraischer Varietäten. Das neutrale Element ist gerade der fixierte Punkt o. Paare (E, o) dieser Art heißen elliptische Kurven (über k).

Literatur

[H] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer Graduate Text in Math. **52**.

[S] J. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer Graduate Texts in Math. **106**.