Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz **WS 2007/08**

Übungen zur Algebraischen Geometrie 2

Blatt 2, Abgabe am 30.10.2007

Aufgabe 5

Sei X ein Schema und $\mathscr{L}$ ein invertierbarer $\mathscr{O}_X$-Modul.

a) Sei $s \in \Gamma(X, \mathscr{L}) \setminus \{0\}$ und $X_s = \{x \in X;\ s \in \mathscr{L}_x \setminus \mathfrak{m}_x \mathscr{L}_x\}$ (aufgefasst als offenes Unterschema von X). Zeige, dass X_s nicht leer ist, wenn X reduziert ist, und dass in jedem Fall $\mathscr{L}|_{X_s} \cong \mathscr{O}_{X_s}$ gilt.

b) Zeige, dass jeder surjektive Homomorphismus von lokalfreien $\mathscr{O}_X$-Moduln vom selben endlichen Rang ein Isomorphismus ist. Wie ist es mit injektiven Homomorphismen?

c) Sei X integer und projektiv über einem Körper k (so dass $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ ein Körper ist). Seien $\Gamma(X, \mathscr{L}) \neq 0$ und $\Gamma(X, \mathscr{L}^\vee) \neq 0$. Zeige, dass $\mathscr{L} \cong \mathscr{O}_X$.

Aufgabe 6

Sei k ein Körper. Zeige, dass die Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n_k)$, $d \mapsto \mathscr{O}(d)$, ein Isomorphismus ist.

Hinweis: Der schwierige Teil ist die Surjektivität. Benutze, dass $\mathrm{Pic}(\mathbb{A}^n_k) = 0$ (siehe Aufgabe 47, Blatt 12 im SS 07). Es gibt dann verschiedene Möglichkeiten, den Beweis zu führen, eine ist, analog zu Aufgabe 48, loc. cit., zu verfahren, eine andere ist diese: Sei ein Geradenbündel $\mathscr{L}$ gegeben. Sei $s \in \Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathscr{L})$, so dass die Einschränkung $s|_{U_0}$ auf die standard-offene Teilmenge $U_0 = D_+(X_0) \cong \mathbb{A}^n_k$ nirgends verschwindet. Der Halm im generischen Punkt η von $\mathbb{P}^n_k \setminus U_0$ ist ein diskreter Bewertungsring. Sei d die Bewertung von s_η. Zeige dann, dass $\mathscr{L} \otimes \mathscr{O}(-d)$ einen Schnitt besitzt, der nirgends verschwindet, also nach Aufgabe 5 a) trivial ist.

Aufgabe 7

a) Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus von Schemata und $\mathscr{L}$ ein (bezüglich f) sehr ampler invertierbarer $\mathscr{O}_X$-Modul. Zeige: $\mathscr{L}$ wird von endlich vielen globalen Schnitten erzeugt.

b) Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus von Schemata, $\mathscr{L}$ und $\mathscr{L}'$ invertierbare $\mathscr{O}_X$-Moduln. Es sei $\mathscr{L}$ sehr ample bezüglich f und $\mathscr{L}'$ werde von endlich vielen globalen Schnitten erzeugt. Zeige: $\mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}'$ ist sehr ample bezüglich f. (*Hinweis:* Segre-Einbettung.)

Aufgabe 8

Sei A ein Ring, M ein A-Modul. Seien $f_1, \ldots, f_n \in A$ mit $(f_1, \ldots, f_n) = (1)$. Zeige: M ist genau dann als A-Modul endlich erzeugt, wenn für alle i die Lokalisierung M_{f_i} ein endlich erzeugter A_{f_i}-Modul ist.