Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz **WS 2007/08**

Übungen zur Algebraischen Geometrie 2

Blatt 6, Abgabe am 27.11.2007

Aufgabe 21

Sei $m \in \mathbb{Z}$. Wann ist

$$X = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[X_0, X_1, X_2]/(X_2^2 - mX_0X_1)$$

normal? Bestimme gegebenenfalls die Normalisierung von X.

Aufgabe 22

Beweise oder widerlege: sind S ein normales Schema und X, Y normale S-Schemata, so ist das Faserprodukt $X \times_S Y$ normal.

Aufgabe 23

Sei k ein Körper und C ein normales Schema, das eigentlich über $\operatorname{Spec} k$ ist mit $\dim C = 1$ (eine *vollständige normale Kurve* über k). Wir zeigen in den folgenden Schritten, dass C projektiv über k ist.

a) Sei $C = \bigcup U_i$ eine endliche offene affine Überdeckung von C. Wähle für jedes i eine offene Immersion $\iota_i \colon U_i \to Y_i$ mit Y_i projektiv über k (warum existiert eine solche?). Sei Y das Faserprodukt aller Y_i über k. Wir erhalten einen eigentlichen Morphismus $h \colon C \to Y$, der den kanonischen Morphismus $\bigcap U_i \to Y$ fortsetzt.

b) Sei $Z = h(C)$ mit der reduzierten Schema-Struktur. Zeige, dass die Abbildung $h \colon C \to Z$ surjektiv ist, und die Projektionen $Y \to Y_i$ dominante Morphismen $Z \to Y_i$ induzieren.

c) Für alle i faktorisiert die Immersion ι_i als $U_i \to C \to Z \to Y_i$. Folgere, dass der Morphismus $C \to Z$ auf allen Halmen Isomorphismen induziert, und ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 24

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Ein integeres k-Schema X von endlichem Typ heißt *rational*, wenn es eine birationale Abbildung von $\mathbb{P}^n_k$ nach X gibt ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ geeignet).

a) Zeige, dass X genau dann rational ist, wenn der Funktionenkörper von X eine rein transzendente Erweiterung von k ist.

b) Jede Quadrik in $\mathbb{P}^2_k$ ist eine rationale Kurve.

c) Die Kurve $V(Y^2 - X^3) \subset \mathbb{A}^2_k$ ist rational.

d) Gib ein Beispiel einer Varietät an, die nicht rational ist.