Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz **WS 2007/08**

Übungen zur Algebraischen Geometrie 2

Blatt 7, Abgabe am 4.12.2007

Aufgabe 25

Seien k ein Körper und C_1, C_2 irreduzible algebraische Kurven über k. Sei $f\colon C_1 \to C_2$ ein k-Morphismus. Zeige, dass f genau dann dominant ist, wenn für alle $x \in C_2$ die Faser $f^{-1}(x)$ endlich ist.

Aufgabe 26

Sei k ein Körper, und sei $f\colon C_1 \to C_2$ ein nicht-konstanter Morphismus eigentlicher irreduzibler Kurven über k. Sei C_1 normal. Zeige, dass f endlich ist.

Aufgabe 27

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper, und C, C' normale eigentliche algebraische Kurve über k. Wir bezeichnen mit C_0 die Menge der abgeschlossenen Punkte von C.

Ist $x \in C_0$, so sei v_x die zum diskreten Bewertungsring $\mathscr{O}_{C,x}$ gehörige Bewertung auf $K(C)$. Ist $s \in K(C)^\times$, so sagt man, s habe eine Nullstelle/Polstelle in x, falls $v_x(s) > 0$ (bzw. < 0) ist. Dann heißt $|v_x(s)|$ die Ordnung der Nullstelle/Polstelle.

a) Sei $f\colon C \to C'$ ein Morphismus, $x' \in C'_0$ und $t \in \mathscr{O}_{C',x'}$ ein Element mit Bewertung 1. Wir schreiben $\deg f^*[x'] := \sum_{x\in f^{-1}(x)} v_x(t)$ (dies ist unabhängig von der Wahl von t). Zeige:

$$\deg f^*[x'] = [K(C) : K(C')].$$

b) Folgere aus Teil a), dass für alle $s \in K(C)$ gilt:

$$\sum_{x\in C_0} v_x(s) = 0.$$

Aufgabe 28

Sei k ein Körper. Zeige, dass die Quadrik $V_+(XY - ZW) \subset \operatorname{Proj} k[W, X, Y, Z] \cong \mathbb{P}^3_k$ birational äquivalent, aber nicht isomorph zu $\mathbb{P}^2_k$ ist.