Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz **WS 2007/08**

Übungen zur Algebraischen Geometrie 2

Blatt 8, Abgabe am 11.12.2007

Aufgabe 29

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper und C eine eigentliche normale algebraische Kurve über k. Sei $f \in K(C)$ eine rationale Funktion, die genau eine Nullstelle hat, die zudem die Ordnung 1 hat (vgl. Aufgabe 27). Zeige, dass C isomorph ist zu $\mathbb{P}^1_k$.

Aufgabe 30

Seien $R \to R'$ ein treuflacher Ringhomomorphismus, und M ein R-Modul. Für $n \geq 0$ sei $R^{(n)}$ das n-fache Tensorprodukt $R' \otimes_R \cdots \otimes_R R'$ (wir setzen $R^{(0)} = R$, $R^{(1)} = R'$). Für $i = 0, \dots, n$ definiere Abbildungen $f_i \colon M \otimes_R R^{(n)} \to M \otimes_R R^{(n+1)}$ durch

$$f_i(m \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n) = m \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_i \otimes 1 \otimes r_{i+1} \otimes \cdots \otimes r_n$$

und

$$d^n \colon M \otimes_R R^{(n)} \to M \otimes_R R^{(n+1)}, \qquad x \mapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f_i(x).$$

Zeige, dass wir einen Komplex

$$0 \to M \to M \otimes R' \to M \otimes R^{(2)} \to \cdots$$

erhalten.

Zeige ferner, dass dieser Komplex exakt ist. *Hinweis:* Es genügt, die Exaktheit nach dem (treuflachen!) Basiswechsel $R \to R'$ zu zeigen. Konstruiere dann eine Homotopie zwischen der Nullabbildung und der identischen Abbildung.

Aufgabe 31

Sei k ein Körper mit unendlich vielen Elementen und $X = \mathbb{A}^1_k$. Seien $x, y \in X$ zwei verschiedene abgeschlossene Punkte, und sei $U = X \setminus \{x, y\}$. Zeige, dass $H^1(X, \mathbb{Z}_U) \neq 0$ (hier bezeichnet $\mathbb{Z}_U$ die Fortsetzung durch Null der konstanten Garbe $\mathbb{Z}$ auf U).

Aufgabe 32

Sei R ein Ring. Sei $\mathcal{A}$ die abelsche Kategorie der R-Moduln. Seien A, B Objekte von $\mathcal{A}$. Eine Extension von A durch B ist eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to B \to X \to A \to 0.$$

Zwei Extensionen ξ, ξ' heißen äquivalent, wenn ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\xi: & 0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\xi': & 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & X' \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

existiert. Wir sagen, dass eine Extension zerfalle, wenn sie isomorph ist zu $0 \to B \to A \oplus B \to A \to 0$ mit den offensichtlichen Morphismen.

Wir nehmen nun an, dass $\mathcal{A}$ genügend viele projektive Objekte besitzt. Für B in $\mathcal{A}$ sei $\mathrm{Hom}(-, B)$ der Funktor $A \mapsto \mathrm{Hom}(A, B)$. Dieser (kontravariante) Funktor ist linksexakt, und wir bezeichnen mit $\mathrm{Ext}^i(-, B)$ seine Rechtsableitungen.

Ist ξ eine Extension wie oben, so sei $\Theta(\xi) \in \mathrm{Ext}^1(A, B)$ das Bild von id_A unter der Übergangsabbildung, die wir aus der langen exakten Kohomologiesequenz für Ext aus ξ erhalten. Dies definiert eine Abbildung Θ von der Menge $\mathrm{YExt}^1(A, B)$ der Äquivalenzklassen von Extensionen ("Yoneda-Ext") nach $\mathrm{Ext}^1(A, B)$.

a) Seien A, B in $\mathcal{A}$, und

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{j} P \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz mit P projektiv. Wir erhalten eine exakte Folge

$$\mathrm{Hom}(P, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, B) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1(A, B) \longrightarrow 0.$$

Sei $x \in \mathrm{Ext}^1(A, B)$ und $\beta \in \mathrm{Hom}(M, B)$ mit $\delta(\beta) = x$. Sei X der Kokern der Abbildung

$$M \to P \oplus B, \qquad m \mapsto (j(m), -\beta(m)).$$

Zeige: Wir erhalten ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"] & P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\xi: & 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "i"] & X \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen (der sogenannte Pushout von j und β). Folgere, dass Θ surjektiv ist.

b) Zeige, dass die Konstruktion in Teil a) für eine andere Wahl von β eine isomorphe Extension liefert. Zeige dann, dass Θ ein Isomorphismus ist.