Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann SS 2012

**Lineare Algebra II**

**Übungsblatt 5**

**Abgabe 11.05.2012**

## Aufgabe 1:

Sei $V \subset \mathbb{R}[X]$ der Unterraum der Polynome vom Grad $\leq 2$.

(i) Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{aligned}(\cdot,\cdot) : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p,q) &\longmapsto \int_0^1 p(X)q(X)dX\end{aligned}$$

ein Skalarprodukt ist.

(ii) Konstruiere mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis von $V$ bezüglich des in (i) definierten Skalarproduktes.

(iii) Berechne die Strukturmatrix des in (i) definierten Skalarprodukts bezüglich der Basis $1, X, X^2$ von $V$.

## Aufgabe 2:

Sei $V$ ein $n$-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum.

(i) Man kann $V$ auch als $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $2n$ auffassen. Sei $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ ein reelles Skalarprodukt auf $V$. Zeige, dass es genau dann ein hermitesches Skalarprodukt $\langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ mit $(v,w) = \operatorname{Re}\langle v,w \rangle$ für alle $v,w \in V$ gibt, wenn $(v,iw) = -(iv,w)$ für alle $v,w \in V$ gilt. Zeige, dass $\langle \cdot,\cdot \rangle$ dann eindeutig bestimmt ist.

(ii) Sei nun $v_1,\dots,v_n$ eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums $V$ und sei $V_0 \subset V$ der von $v_1,\dots,v_n$ erzeugte $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeige, dass es zu jedem reellen Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ auf $V_0$ ein eindeutig bestimmtes hermitesches Skalarprodukt $\langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ gibt, welches $(\cdot,\cdot)$ fortsetzt.

## Aufgabe 3:

Sei $V$ ein unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum und seien $U, W \subset V$ Untervektorräume. Zeige:

(i) $U \oplus U^\perp = V$,

(ii) $(U^\perp)^\perp = U$,

(iii) $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$,

(iv) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

**Aufgabe 4:**

(i) Sei $V$ ein euklidischer Vektorraum. Zeige, dass für $x, y \in V$ genau dann $||x|| = ||y||$ gilt, wenn $x + y \perp x - y$ ist.

(ii) Sei nun $V \neq 0$ ein unitärer Vektorraum. Zeige, dass $x, y \in V$ existieren, für die die Aussage von Teil (i) nicht gilt, dass sie aber für alle $x, y \in V$ mit $\langle x, y \rangle = 0$ weiterhin gilt.

(iii) Sei $V$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Jeder positiv-definiten hermiteschen Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $V$ kann man via $v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$ eine Norm $|| \cdot ||$ auf $V$ zuordnen. Zeige, dass diese Abbildung eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C} \\ \text{hermitesch, positiv-definit} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} || \cdot || : V \to \mathbb{R} \\ \text{Norm auf } V, \text{die (P) erfüllt.} \end{array} \right\}$$

definiert. Hierbei ist (P) die Parallelogrammgleichung

$$||v + w||^2 + ||v - w||^2 = 2(||v||^2 + ||w||^2) \text{ für alle } v, w \in V.$$

Zeichne ein Bild, das diese Gleichung illustriert.

Homepage: `www.math.uni-bonn.de/people/hellmann/LA_II`