Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann

SS 2012

Lineare Algebra II

Übungsblatt 8

Abgabe 08.06.2012

Aufgabe 1:
Sei V ein euklidischer Vektorraum und $v \in V\backslash\{0\}$.

(i) Zeige:
$$\sigma_v : V \longrightarrow V,\ x \longmapsto x - 2\frac{(x,v)}{(v,v)}v$$
ist eine orthogonale Abbildung. Ist sie auch selbstadjungiert? Berechne die Eigenwerte und Eigenräume von σ_v.

(ii) Zeige: Jedes $f \in O(V)$ mit $\dim V(1,f) = \dim V - 1$ ist von der Form σ_v.

(iii) Sei $w \in V\backslash\{0\}$ ein weiterer Vektor. Wie sieht die Normalform der Matrizendarstellung von $\sigma_v \circ \sigma_w$ aus?

Aufgabe 2:
Sei $V, (\cdot,\cdot)$ ein euklidischer Vektorraum und sei $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ eine alternierende Bilinearform. Zeige, dass eine Orthonormalbasis von V bezüglich $(\cdot,\cdot)$ existiert, so dass die Strukturmatrix von β bezüglich dieser Basis durch eine Blockmatrix der Form
$$\begin{pmatrix} T_1 & & & & & & \\ & T_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & T_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$
gegeben ist, wobei die $T_i \in M_2(\mathbb{R})$ für $i = 1, \dots, r$ von der Form
$$T_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i \\ -a_i & 0 \end{pmatrix}$$
für reelle Zahlen $a_i > 0$ sind.

Aufgabe 3:
Die Permutation $\sigma \in S_8$ sei definiert durch

$$\sigma(i) = \begin{cases} i+1 & 1 \leq i \leq 7 \\ 1 & i = 8. \end{cases}$$

Bekanntlich ist die Permutationsmatrix P_σ orthogonal. Bestimme eine Matrix $A \in O(8, \mathbb{R})$, so dass $A^{-1} P_\sigma A$ die in der Vorlesung angegebene Normalform für orthogonale Matrizen hat. Wie sieht diese Normalform aus?

Aufgabe 4:[1]
Sei $V, (\cdot, \cdot)$ ein euklidischer Vektorraum. Seien $d \in \mathbb{R}$ und $a, b \in V$.

(i) Zeige, dass

$$\begin{aligned} E(a,b,d) &= \{v \in V \mid ||a-v|| + ||b-v|| = d\} && \text{falls } ||a-b|| < d, \\ H(a,b,d) &= F(a,b,d) \cup F(a,b,-d) && \text{falls } ||a-b|| > d > 0 \end{aligned}$$

Nullstellenmengen von Quadriken sind. Dabei ist

$$F(a,b,d) = \{v \in V \mid ||a-v|| - ||b-v|| = d\}.$$

Die Punkte a und b heißen *Brennpunkte* der Quadriken.

Hinweis: Finde zunächst eine Gleichung für

$$X(a,b,d) = E(a,b,d) \cup E(a,b,-d) \cup F(a,b,d) \cup F(a,b,-d),$$

und reduziere auf den Fall $a = -b$.

(ii) Sei nun $\dim V = 2$. Zeige, dass

  (a) jede Ellipse von der Form $E(a,b,d)$ ist.
  (b) jede Hyperbel von der Form $H(a,b,d)$ ist. Die Mengen $F(a,b,d)$ und $F(a,b,-d)$ heißen dann *Zweige* der Hyperbel $H(a,b,d)$.

(iii) Sei $V = \mathbb{R}^2$ versehen mit dem Standardskalarprodukt. Bestimme die Gleichung einer Quadrik, so dass $(0,0)$ ein Brennpunkt ist und die Punkte $(4,3), (3,0)$ und $(-12,-5)$ in der Lösungsmenge der Quadrik liegen, und zwar alle auf demselben Zweig, falls es sich um eine Hyperbel handelt.

(Wo liegt der andere Brennpunkt? Wo liegen die Hauptachsen? Skizziere die Quadrik!)

Homepage: `www.math.uni-bonn.de/people/hellmann/LA_II`

[1]Die Abgabe von Aufgabe 4 ist freiwillig. Die Aufgabe wird nicht bepunktet.