Prof. Dr. M. Rapoport
T. Richarz

WS 2013/14

Algebra II

1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei R ein Integritätsring, der kein Körper ist, dessen von Null verschiedene Ideale eine Primidealzerlegung besitzen und in dem jede Primidealzerlegung eindeutig ist. Zeige, dass R ein Dedekindring ist.

Aufgabe 2:

a) Seien R ein Dedekindring, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Ideale von R. Zeige: Gilt $\mathfrak{a}^n = \mathfrak{b}^n$, für ein $n \geq 1$, so ist bereits $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

b) Der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist ein Dedekindring. Zerlege das Ideal (6) in diesem Ring in Primideale. Wie lässt sich dann die Zerlegung $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$ interpretieren?

Aufgabe 3:

Ein Dedekindring ist genau dann faktoriell, wenn er ein Hauptidealring ist.

Aufgabe 4:

Jedes Ideal in einem Dedekindring lässt sich von zwei Elementen erzeugen.

Tip: Sei R ein Dedekindring, $\mathfrak{a} \neq 0$ ein Ideal von R. Dann ist jedes Ideal in $R/\mathfrak{a}$ ein Hauptideal.

Abgabe: Donnerstag, 24. Oktober 2013.