Prof. Dr. M. Rapoport
T. Richarz **WS 2013/14**

Algebra II

7. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Sei α eine Nullstelle des Polynoms $X^3 - X - 4$ und $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Sei R der Ring der ganzen Zahlen von K.

a) Zeige, dass $1, \alpha, \frac{\alpha+\alpha^2}{2}$ eine Ganzheitsbasis von R ist und dass $R = \mathbb{Z}[\frac{\alpha+\alpha^2}{2}]$.

b) Zeige, dass die Klassenzahl von K gleich 1 ist.

Aufgabe 2:
Sei $p \geq 7$ eine Primzahl der Form $p = 4n - 1$. Zeige, dass $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ genau dann Klassenzahl 1 hat, wenn $m^2 + m + n$ für alle $m \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ eine Primzahl ist.

Tip: Das Element $\frac{-1+\sqrt{-p}}{2}$ erzeugt den Ring der ganzen Zahlen von K. Was ist sein Minimalpolynom? Zeige nun, dass beide Bedingungen dazu äquivalent sind, dass alle Primzahlen $q < n$ in K träge sind.

Aufgabe 3:
a) Sei k ein endlicher Körper und $|\cdot| : k \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein Absolutbetrag auf k. Zeige, dass $|x| = 1$ für alle $x \in k^\times$.

b) Sei k ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Zeige, dass es keine archimedischen Absolutbeträge auf k gibt.

Aufgabe 4:
Sei K ein Körper mit einem nicht-archimedischen Absolutbetrag $|\cdot|$. Seien $x, y \in K$ mit $|x| \neq |y|$. Zeige, dass $|x + y| = \max(|x|, |y|)$.

Abgabe: Donnerstag, 05. Dezember 2013.