

## בוחרן 1 – מבנים אלגבריים 2 (תשס"ה)

ענו על השאלות הבאות.  
מותר להשתמש במשפטים שלמדתם בשיעור או בתרגול, בתנאי שתצטטו אותם במדויק.

1. (20%) הראו כי הפולינום  $x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x + 2$  הוא אי-פריק ב-  $\mathbb{Q}[x]$ .
2. יהי  $\alpha = \sqrt[5]{7}$  שורש חמישי ממשי של 7, ויהי  $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ .
  - א. (10%) חשבו את  $[K : \mathbb{Q}]$ .
  - ב. (10%) האם ההרחבה  $K \supset \mathbb{Q}$  נורמלית?
3. יהיו  $p, q$  שני ראשוניים שונים.
  - א. (10%) הראו כי  $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p} + \sqrt{q})$ .
  - ב. (10%) הראו כי ההרחבה  $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) \supset \mathbb{Q}$  היא נורמלית.
  - ג. (10%) חשבו את חבורת גלואה  $Gal(\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})/\mathbb{Q})$ .
4. עבור כל אחת מהטענות הבאות, ציינו האם היא נכונה או שגויה. הוכיחו או תנו דוגמה נגדית.
  - א. (10%) לכל שדה  $K$  קיימת הרחבת שדות לא טריביאלית  $L \supset K$ ,  $L \neq K$ .
  - ב. (10%) לכל שלם  $n \geq 1$  קיימת הרחבה  $K$  של  $\mathbb{Q}$  עם  $[K : \mathbb{Q}] = n$ .
  - ג. (10%) אם  $L \supset K$  הרחבה ו-  $[L : K] = 2$ , אזי קיים  $\alpha \in L$  כך ש-  $L = K(\alpha)$  וגם  $\alpha^2 \in K$ .

**בהצלחה!**