9.5.2005

עבודת בית במבנים אלגבריים 2

לפניכם מספר בעיות. ענו על כמה שתרצו (מותר לענות גם על סעיפים בודדים מתוך שאלות), פתרון נכון ומלא של כל סעיף שווה **6** נקודות. ניתן לצבור גם יותר מ- 100 נקודות, עד ל- **162** נקודות.

ציון העבודה מהווה **10%** מהציון הסופי בקורס.

נמקו היטב את תשובותיכם. מותר להשתמש בכל משפט שהוכח בשיעור, בתנאי שיצוטט במדויק. מותר להיעזר בספרות.

שימו לב: העבודה היא עצמית, ואין להיעזר בכל אדם אחר.

יש להגיש את העבודה עד **ליום א' 15.5.2005 בשעה 15:00** (בשיעור).

בהצלחה!

1. יהי K שדה ויהי $f \in K[t]$ פולינום ממעלה חיובית. יהי $\alpha \in \overline{K}$ שורש של f בסגור אלגברי של K. הראו כי f אי פריק ב- $K[t]$ אם ורק אם $[K(\alpha):K] = \deg f$.

2. יהי $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{7} \in \mathbf{R}$. מצאו את הפולינום המינימלי של α מעל $\mathbf{Q}$.

3. יהי $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{3}} \in \mathbf{R}$. הראו כי ההרחבה $\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q}$ היא הרחבת גלואה וחשבו את חבורת גלואה שלה.

4. תהי $L \supset F$ הרחבת שדות אלגברית ויהי $\alpha \in L$.
   א. הראו כי אם $[F(\alpha):F]$ מספר איזוגי אזי $\alpha \in F(\alpha^2)$.
   ב. יהי $n \geq 1$. הראו כי אם $[F(\alpha):F]$ זר ל- $n!$ אזי $\alpha \in \bigcap_{i=1}^{n} F(\alpha^i)$.
   ג. האם התנאי "$[F(\alpha):F]$ אינו מתחלק ב- 3" גורר בהכרח ש- $\alpha \in F(\alpha^3)$?

5. יהי L שדה פיצול של הפולינום $f(t) = t^7 - 4$ מעל $\mathbf{Q}$, ויהי $\alpha \in L$ שורש של f.
   א. הראו כי $[\mathbf{Q}(\alpha):\mathbf{Q}] = 7$ וחשבו את דרגת ההרחבה $[L:\mathbf{Q}]$.
   ב. הוכיחו כי $L/\mathbf{Q}$ הרחבת גלואה וחשבו את חבורת גלואה שלה.
   ג. תארו את כל שדות הביניים $\mathbf{Q} \subseteq F \subseteq L$.
   ד. לכל שדה ביניים F, חשבו את $[F:\mathbf{Q}]$, קבעו האם $F/\mathbf{Q}$ נורמלית ומצאו יוצר $\beta \in F$ (כלומר $F = \mathbf{Q}(\beta)$).

6. יהי F שדה ממציין p ראשוני. יהי $a \in F$ ונתבונן בפולינום $f(t) = t^p - t - a$ ב- $F[t]$.
   א. יהי E שדה פיצול של f מעל F ויהי $\alpha \in E$ שורש של f. חשבו את שאר השורשים.
   ב. נניח שאין ל- f שורשים ב- F. הראו כי f אי-פריק ב- $F[t]$.
   ג. בתנאי סעיף ב', יהי $L = F[t]/(f)$. הראו כי L/F הרחבת גלואה וחשבו את $Gal(L/F)$.

7. יהי K שדה ממציין שונה מ- 2, יהיו $a,b \in K$ כך שהפולינום $t^3 + at + b$ אי-פריק ב- $K[t]$ ויהי $\alpha \in \overline{K}$ שורש של $t^3 + at + b$.

א. הראו כי ההרחבה $K(\alpha)/K$ היא נורמלית אם ורק אם למשוואה $x^2+(4a+3\alpha^2)=0$ יש פתרון x בשדה $K(\alpha)$.

ב. יהי $\alpha\in\mathbf{C}$ שורש של הפולינום t^3-3t+1. הראו כי $\sqrt{12-3\alpha^2}\in\mathbf{Q}(\alpha)$ וכי $\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q}$ הרחבת גלואה עם חבורת גלואה ציקלית מסדר 3.

8. יהי $n\geq 1$ ויהי K שדה ממציין זר ל- n. נניח ש- K מכיל שורש יחידה מסדר n, ζ.

א. תהי $L\supset K$ הרחבת גלואה עם חבורת גלואה G. יהי $\alpha\in L$ כך ש- $L=K(\alpha)$ ונניח שקיים $\sigma\in G$ כך ש- $\sigma(\alpha)=\zeta\alpha$. הוכיחו כי קיים $a\in K$ כך ש- $L=K(\sqrt[n]{a})$.

ב. תהי $L\supset K$ הרחבת גלואה עם חבורת גלואה ציקלית מסדר n. הוכיחו כי קיים $a\in K$ כך ש- $L=K(\sqrt[n]{a})$.

רמז: הראו שקיים $\beta\in L$ כך ש- $\alpha=\beta+\zeta^{-1}\sigma(\beta)+\zeta^{-2}\sigma^2(\beta)+\ldots+\zeta^{-(n-1)}\sigma^{n-1}(\beta)$ שונה מ- 0, ואז השתמשו בסעיף א'.

9. תהי $L\supset K$ הרחבת גלואה ויהי $f\in K[t]$ פולינום אי פריק.

א. אם f מתפרק ב- $L[t]$ למכפלת פולינומים אי-פריקים (ב- $L[t]$) $f=g_1g_2\cdot\ldots\cdot g_r$, אזי כל המעלות $\deg g_i$ שוות ו- r מחלק את $\deg f$.

ב. אם $f\in K[t]$ אי-פריק ממעלה שהיא מספר ראשוני, אזי או ש- f מתפצל ב- $L[t]$ למכפלת גורמים ליניאריים, או ש- f נשאר אי-פריק ב- $L[t]$.

ג. האם א' ו- ב' נשארים נכונים גם ללא ההנחה ש- $K\supset L$ גלואה?

10. תהי $L\supset K$ הרחבת גלואה סופית עם חבורת גלואה G.

א. תהי $H\leq G$ תת חבורה ונגדיר $N_G(H)=\left\{g\in G: gHg^{-1}=H\right\}$. הראו כי $N_G(H)$ היא תת-חבורה של G וכי $H\lhd N_G(H)$.

ב. יהי $K\subset F\subset L$ שדה ביניים ותהי $H=Gal(L/F)\leq G$. הראו: $Aut(F/K)\cong N_G(H)/H$.

11. יהי K שדה ממציין $p>0$ ותהי $L\supset K$ הרחבת שדות סופית. כזכור, איבר $\alpha\in L$ הוא אי-ספרבילי לחלוטין מעל K אם קיים $n\geq 0$ כך ש- $\alpha^{p^n}\in K$.

א. הראו כי קבוצת כל האיברים ב- L שהם אי-ספרביליים לחלוטין מעל K מהווה שדה, שיסומן L_{ins}.

ב. הוכיחו כי $[L:L_{ins}]_s=[L:K]_s$.

ג. הוכיחו כי אם L/K נורמלית אזי L/L_{ins} ספרבילית.

12. יהי F שדה סופי בן q איברים.

א. תהי $L\supset F$ הרחבת שדות סופית ויהיו $f,g\in F[t]$ שני פולינומים אי-פריקים ממעלה n. הראו כי אם קיים $\alpha\in L$ כך ש- $f(\alpha)=0$ אזי קיים $\beta\in L$ כך ש- $g(\beta)=0$.

ב. יהי p ראשוני. חשבו את המכפלה $\prod g(t)$ של כל הפולינומים האי-פריקים $g(t)$ ב- $F[t]$ ממעלה p.